

## Введение

Радиоинженеру традиционно приходится иметь дело с сигналами. С математической точки зрения сигнал представляет собой временную функцию. Поэтому для успешной обработки сигнала необходимо понять, что такое сигнал; какие у него могут быть математические характеристики; что значит, что два сигнала близки друг к другу; как понять «расстояние» между сигналами. Для того чтобы найти связь между указанными характеристиками, а также выяснить границы их применимости, необходимо освоить ряд вспомогательных математических понятий и методов исследования, которые не входят в классический курс «Высшая математика». Поэтому на кафедре Высшей математики разработан курс «Специальные математические методы и функции», относящийся к разделу «Специальные главы высшей математики».

Данное учебное пособие предназначено для студентов заочной формы обучения специальностей «Многоканальные системы коммуникаций» и «Системы радиосвязи, радиовещания и телевидения». В нем содержится условие контрольной работы и теоретические сведения, необходимые для ее успешного выполнения. В пособии также подробно разобрано решение задач, относящихся к тому же классу, что и задачи контрольной работы. Так, задачи 1 и 3 контрольной работы рассмотрены соответственно в разделах 3.2 и 7, а задачи 2 и 4 – в разделе 6.4.

## § 1. Линейные, метрические и гильбертовы пространства

### 1.1. Линейное пространство

**Определение 1.1.** *Линейным (или векторным) пространством*  $L$  называется всякая совокупность объектов (элементов)

$$L = \{\bar{x}, \bar{y}, \dots, \bar{z}, \dots, \bar{u}, \dots\},$$

условно называемых *векторами*, над которым определены две операции – сложения  $\oplus$ :  $\forall \bar{x}, \bar{y} \in L$

$$\bar{x} \oplus \bar{y} = \bar{z} \in L$$

и

умножения на число  $\otimes$ :  $\forall \bar{x} \in L, \forall I \in P$  ( $P$  – некоторое числовое поле)

$$\lambda \otimes \bar{x} = \bar{u} \in L,$$

подчиняющиеся следующим аксиомам:

- 1°.  $\bar{x} \oplus \bar{y} = \bar{y} \oplus \bar{x}$ ;
- 2°.  $(\bar{x} \oplus \bar{y}) \oplus \bar{z} = \bar{x} \oplus (\bar{y} \oplus \bar{z})$ ;
- 3°. существует *нуль-вектор*:  $\bar{x} \oplus \bar{0} = \bar{x}$  для любого  $\bar{x} \in L$ ;
- 4°. для каждого вектора  $\bar{x}$  существует противоположный  $\bar{x}'$  такой, что  $\bar{x} \oplus \bar{x}' = \bar{0}$ ;
- 5°.  $1 \otimes \bar{x} = \bar{x}$ ;
- 6°.  $(\alpha + \beta) \otimes \bar{x} = \alpha \otimes \bar{x} \oplus \beta \otimes \bar{x}$ ;
- 7°.  $a \otimes (\bar{x} + \bar{y}) = a \otimes \bar{x} \oplus a \otimes \bar{y}$ ;
- 8°.  $a \otimes (b \otimes \bar{x}) = (ab) \otimes \bar{x}$ .

Если в качестве поля  $P$  выступает множество вещественных чисел  $\mathbf{R}$  или множество комплексных чисел  $\mathbf{C}$ , то  $L$  называется соответственно *действительным* или *комплексным линейным пространством*.

Из аксиом 1° и 2° следует, что сложение векторов коммутативно и ассоциативно, а из аксиом 3° и 4° вытекает существование обратной операции к сложению – операции вычитания векторов:  $\bar{x} - \bar{y} = \bar{x} \oplus \bar{y}'$ . Аксиомы умножения вектора на число показывают, что:

- а) число 1 играет роль единицы также и при этом умножении (5°);
- б) выполняется распределительный закон как относительно сложения чисел (6°), так и относительно сложения векторов (7°);
- в) справедлив ассоциативный закон относительно произведения чисел (8°).

Заметим, что из аксиом 5° – 8° следует, что

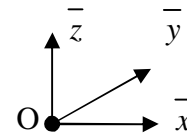
$$\begin{aligned} 0 \otimes \bar{x} &= \bar{0} \text{ для } \forall \bar{x} \in L, \\ \alpha \otimes \bar{0} &= \bar{0} \text{ для } \forall \alpha \in P, \\ 1 \cdot \bar{x}' &= -\bar{x} \end{aligned}$$

– противоположный элемент к  $\bar{x}$  всегда можно получить, «умножив»  $\bar{x}$  на число (-1).

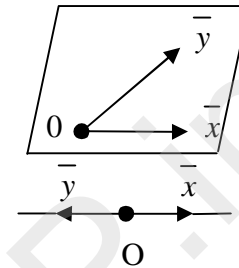
### Примеры линейных пространств

При рассмотрении нижеследующих примеров п°1 - п°11 будем полагать, что множество  $P$  является множеством действительных чисел.

**п°1.** Все векторы обычного трехмерного пространства, исходящие из точки  $O$ , образуют линейное пространство  $L$ .



**п°2.** Все векторы плоскости, исходящие из фиксированной точки  $O$  плоскости, также образуют линейное пространство  $L$ .



**п°3.** Все векторы прямой, исходящие из любой точки  $O$  прямой, образуют линейное пространство  $L$ .

**п°4.** Совокупность всех многочленов степени не выше  $n$

$$\{a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_{n-1} t + a_n\}$$

образует линейное пространство  $L$  относительно обычных операций сложения и умножения на число.

**п°5.** Множество всех решений системы

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} : x = 0 \cdot t, y = t, z = t, \forall t \in \mathbf{R}$$

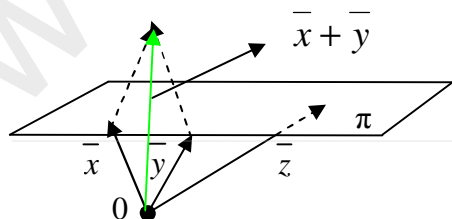
образует линейное пространство  $L$ .

Для того, чтобы показать, что множество  $L$ , определенное в каждом из примеров п°1 - п°5, является линейным векторным пространством относительно введенных операций сложения и умножения на число, достаточно проверить выполнение аксиом 1° - 8° определения 1.1.

**п°6.** Линейным пространством является и множество всех решений  $\{y(x)\}$  линейного однородного дифференциального уравнения

$$L(y(x)) = Y^{(n)} + a_1 Y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} Y' + a_n Y = 0. \quad (1.1)$$

Δ Действительно, если  $Y_1$  и  $Y_2$  – решения (1.1), т.е.  $L(y_1)=0$ ,  $L(y_2)=0$ , то  $Y_1+Y_2$ ,  $C_1 Y_1$ ,  $C_1 Y_1 + C_2 Y_2$ , где  $C_1$ ,  $C_2$  – любые вещественные или комплексные числа, есть снова решения уравнения (1.1) и все аксиомы 1° – 8° выполняются.

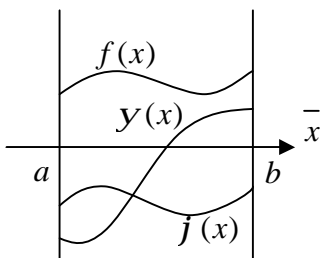


вектора  $\bar{x} + \bar{y}$  не упирается в плоскость  $\pi$ ).

**п°7.** Рассмотрим теперь множество  $M$  векторов трехмерного пространства, исходящих из точки  $O$ , концы которых упираются в плоскость  $\pi$ , не проходящую через точку  $O$ . Множество  $M$  уже не будет линейным пространством, так как сумма векторов  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  не принадлежит  $M$  (конец

**п°8.** Рассмотрим множество  $M$  векторов  $\bar{a}(a_1, a_2)$  таких, что  $a_1 > 0, a_2 > 0$ . Пусть вектор  $\bar{x} = (x_1, x_2) \in M$ . Тогда  $x_1 > 0, x_2 > 0$  и вектор  $\bar{x}' = (-x_1, -x_2)$  будет обратным для  $\bar{x}$ . Однако  $-x_1 < 0, -x_2 < 0$ . Поэтому  $\bar{x}'$  не принадлежит  $M$ . Следовательно, множество  $M$  не является линейным пространством.

**п°9.** Непосредственной проверкой аксиом 1° - 8° определения 1.1 несложно выяснить, что множество  $C[a, b] = \{f(x), g(x), \dots\}$  всех функций, непрерывных на отрезке  $[a, b]$ , с обычными операциями сложения  $f(x) + j(x)$  и умножения на число  $a \cdot f(x)$  образует линейное пространство.



**п°10.** Множество всех дифференциалов в точке  $x$   

$$D = \{df(x), dj(x), \dots\}$$

образует действительное линейное пространство.

**п°11.** Множество всех матриц

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}, \dots \right\}$$

размера  $m \times n$  с обычными операциями сложения матриц и умножения матрицы на число образует комплексное линейное пространство.

## 1.2. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Базис и размерность линейного пространства

Пусть  $L$  – линейное векторное пространство над полем  $P$ .

**Определение 1.2.** Вектор  $\bar{b} \in L$  называется *линейной комбинацией* векторов  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m$ , если найдется такой набор чисел  $b_1, b_2, \dots, b_m$  из поля  $P$ , что справедливо равенство

$$\bar{b} = b_1 \bar{a}_1 \oplus b_2 \bar{a}_2 \oplus \dots \oplus b_m \bar{a}_m.$$

**Определение 1.3.** Система векторов  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m$  называется *линейно зависимой*, если равенство

$$b_1 \bar{a}_1 \oplus b_2 \bar{a}_2 \oplus \dots \oplus b_m \bar{a}_m = \bar{0}$$

может быть выполнено хотя бы для одного ненулевого набора чисел  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) \neq (0, 0, \dots, 0)$ .

**Определение 1.4.** Система векторов  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m$  называется *линейно независимой*, если равенство

$$b_1 \bar{a}_1 \oplus b_2 \bar{a}_2 \oplus \dots \oplus b_m \bar{a}_m = \bar{0}$$

выполняется тогда и только тогда, когда  $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$ .

**п°12.** Исследовать на линейную зависимость векторы

а)  $\bar{a} = (2, 1, 0, 0), \bar{b} = (-5, 0, 3, 1), \bar{c} = (3, 4, 3, 0), \bar{d} = (1, 1, 1, 0)$ ;

$$\text{б) } \bar{a} = (2, -1, 0, 3), \bar{b} = (3, 2, -1, 5), \bar{c} = (8, 2, 0, 1), \bar{d} = (10, 1, 0, 4).$$

Образуют ли указанные векторы базис пространства  $\mathbf{R}^4$ ?

Δ Ясно, что векторы  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$  принадлежат пространству  $\mathbf{R}^4$ . Исследуем их на линейную зависимость. Для этого составим матрицу  $A$ , строками которой являются векторы  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ , и найдем ее определитель:

а)

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{раскладываем по} \\ \text{четвертому столбцу} \end{vmatrix} = -0 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} -$$

$$-0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{используем правило} \\ \text{треугольника для} \\ \text{нахождения определителя} \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot 3 - 3 \cdot 1 \cdot 1 = 2.$$

Так как  $\det A \neq 0$ , то векторы  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$  линейно независимы и образуют базис в пространстве  $\mathbf{R}^4$ .

б)

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \\ 8 & 2 & 0 & 1 \\ 10 & 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{раскладываем по} \\ \text{третьему столбцу} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 8 & 2 & 1 \\ 10 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \text{используем правило} \\ \text{треугольника для} \\ \text{нахождения определителя} \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot 2 + 8 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 10 - 2 \cdot 3 \cdot 10 - 2 \cdot 1 \cdot 1 + 8 \cdot 1 \cdot 4 = 0.$$

Так как  $\det A = 0$ , то векторы  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$  являются линейно зависимыми и поэтому не образуют базис пространства  $\mathbf{R}^4$ . ▲

**Определение 1.5.** Линейное пространство  $L$  называется  $n$ -мерным, если в нем существует линейно независимая система векторов  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$  такая, что всякий вектор  $\bar{x}$  пространства  $L$  представляется в виде

$$\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \bar{e}_n$$

линейной комбинации из векторов  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ . Тогда система векторов  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$  называется базисом, числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – координатами вектора  $\bar{x}$  в этом базисе, а само пространство обозначается  $L_n$ .



$$(a_{ij}) = a_{11}E_{11} + \dots + a_{ij}E_{ij} + \dots + a_{mn}E_{mn}.$$

Для линейных пространств, рассмотренных в примерах п°9 и п°10, базис будет найден несколько позднее.

**Определение 1.6.** Линейное пространство  $L$  называется *бесконечномерным*, если в нем существуют системы из *любого* числа линейно независимых векторов.

Обозначать такое пространство будем так:  $L = L_\infty$ .

**п°13.** Множество всех аналитических (бесконечное число раз дифференцируемых) функций  $L = C^\infty = \{f(x), j(x), \dots\}$  образует бесконечномерное линейное пространство. В качестве базиса в нем можно взять набор простейших многочленов  $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ .

Из примера п°13 легко следует, что в качестве базиса множества  $D$  из п°10 можно взять множество  $\{d(1), dx, dx^2, \dots, dx^n, \dots\}$ .

**п°14.** Пусть  $L = \{j(x), f(x), \dots\}$  – множество всех кусочно-непрерывных и кусочно-монотонных функций на отрезке  $[-p, p]$  с точками разрыва первого рода. Из теории рядов Фурье известно, что набор функций

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots\}, \quad n \in N$$

( $N$  – множество натуральных чисел),

образует базис пространства  $L$ , а любую функцию  $f(x) \in L$  можно представить рядом Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

$$\text{где } a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \cos nxdx, \quad b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^p f(x) \sin nxdx, \quad n \in N.$$

**Замечание 1.** Все линейные пространства  $L_n$  размерности  $n$  имеют одинаковые свойства. Поэтому достаточно изучить свойства арифметического линейного пространства  $A_n$ , элементы которого представляют собой упорядоченный набор  $n$  вещественных чисел:

$$\overline{A_n} = \{\overline{x}(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in R\}.$$

Векторы  $\overline{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \overline{e}_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \overline{e}_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$  образуют базис пространства  $A_n$ .

**Замечание 2.** В обычном трехмерном векторном пространстве  $\mathbf{R}^3$  мы вводили операцию скалярного произведения двух векторов. Как известно, в декартовой системе координат скалярное произведение векторов  $\overline{a}(a_x, a_y, a_z)$  и  $\overline{b}(b_x, b_y, b_z)$  может быть найдено по формуле:

$$(\overline{a}, \overline{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\overline{a}| |\overline{b}| \cos(\overline{a}, \overline{b}).$$

С помощью скалярного произведения для каждого вектора  $\overline{a}$  естественным образом находится длина

$$|\bar{a}| = \sqrt{(\bar{a}, \bar{a})} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

и для любых векторов  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  легко определяется угол  $\varphi$  между ними:

$$\varphi = \arccos \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}| |\bar{b}|}.$$

Пространство  $\mathbf{R}^3$  и операция скалярного произведения в этом пространстве были известны еще во времена Евклида, который жил в IV веке до нашей эры. Поэтому  $\mathbf{R}^3$  с введенной операцией скалярного произведения называется *евклидовым пространством* и обозначается  $E_3$ . Обобщим понятие евклидова пространства на случай любого линейного пространства  $L$ .

### 1.3. Евклидово пространство

**Определение 1.7.** Действительное линейное пространство  $L$  называется *евклидовым*, если каждой паре векторов  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  из  $L$  сопоставляется вещественное число  $(\bar{x}, \bar{y})$  так, что  $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{x}_1, \bar{x}_2 \in L$  и  $\forall a \in \mathbf{R}$  выполняются аксиомы:

- 1°.  $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{y}, \bar{x})$ ;
- 2°.  $(\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_2, \bar{y}) = (\bar{x}_1, \bar{y}) + (\bar{x}_2, \bar{y})$ ;
- 3°.  $(a \otimes \bar{x}, \bar{y}) = a(\bar{x}, \bar{y})$ ;
- 4°.  $(\bar{x}, \bar{x}) = \bar{x}^2 \geq 0, (\bar{x}, \bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = 0$ .

Число  $(\bar{x}, \bar{y})$  называется *скалярным произведением* векторов  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ ,  $(\bar{x}, \bar{x})$  – *скалярным квадратом* вектора  $\bar{x}$  (пишут  $\bar{x}^2$ ). Введенная операция называется *скалярным умножением* векторов  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ .

Аксиома 1° требует, чтобы скалярное произведение было коммутативно, т.е. не зависело от порядка сомножителей. Аксиомы 2° и 3° указывают на линейность этой операции по каждому аргументу.

С помощью скалярного произведения в евклидовом пространстве по аналогии с трехмерным евклидовым пространством  $E_3$  определяются следующие понятия:

1) *норма* вектора  $\bar{x}$  (норма является аналогом длины вектора в обычном пространстве  $\mathbf{R}^3$ ):

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})};$$

2) *угол* между векторами  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ :

$$\cos(\angle \bar{x}, \bar{y}) = \frac{(\bar{x}, \bar{y})}{\|\bar{x}\| \|\bar{y}\|};$$

3) *расстояние* между векторами  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ :

$$\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \|\bar{x} - \bar{y}\| = \sqrt{(\bar{x} - \bar{y}, \bar{x} - \bar{y})}.$$



Пройдемся теперь по некоторым примерам рассмотренных ранее линейных пространств  $L$  и посмотрим, как в каждом из них вводится скалярное произведение, превращающее  $L$  в евклидово пространство  $E$  соответствующей размерности.

**п°1.** В  $\mathbf{R}^3$  скалярное произведение обычное:  $(\bar{x}, \bar{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ .

**п°2.** На плоскости  $\mathbf{R}^2$  скалярное произведение можно определить так:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

**п°3.** На прямой  $\mathbf{R}^1$  операция скалярного произведения вводится следующим образом:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = x_1 y_1.$$

**п°4.** В арифметическом пространстве  $A_n$  с базисом

$$\{\bar{e}_1(1,0,\dots,0), \bar{e}_2(0,1,0,\dots,0), \dots, \bar{e}_n(0,0,\dots,0,1)\}$$

для векторов  $\bar{x}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $\bar{y}(y_1, y_2, \dots, y_n)$  естественно ввести скалярное произведение по формуле

$$(\bar{x}, \bar{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

**п°9.** Скалярное произведение двух непрерывных на отрезке  $[a, b]$  функций  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  вычисляется по формуле

$$(f(x), \varphi(x)) = \int_a^b f(x)\varphi(x) dx.$$

Иногда скалярное произведение в пространстве непрерывных на отрезке  $[a, b]$  функций задают в более общем виде:

$$(f(x), j(x)) = \int_a^b r(x)f(x)j(x) dx,$$

где  $\rho(x) > 0, \forall x \in [a, b]$ , – *весовая функция*.

Отметим некоторые удивительные свойства евклидова пространства.

1) В евклидовом пространстве есть «ортогональные» векторы.

**Определение 1.8.** Говорят, что «вектор»  $\bar{x}$  *ортогонален* «вектору»  $\bar{y}$ , если их скалярное произведение равно нулю:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = 0.$$

2) В евклидовом пространстве есть особый ортонормированный базис  $\{\bar{e}_1^*, \bar{e}_2^*, \dots, \bar{e}_n^*, \dots\}$  такой, что все векторы этого базиса имеют единичную «норму»

$$1 = \|\bar{e}_1^*\| = \|\bar{e}_2^*\| = \dots = \|\bar{e}_n^*\| = \dots$$

и взаимно ортогональны друг к другу:

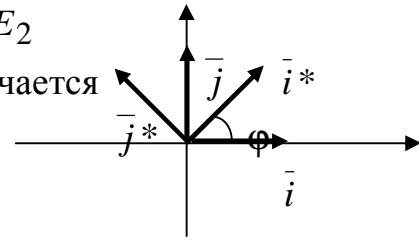
$$(\bar{e}_i^*, \bar{e}_j^*) = 0, \text{ если } i \neq j.$$

Заметим, что ортонормированных базисов существует бесконечно много. Даже в двумерной плоскости  $E_2$

с базисом  $\{\bar{i}, \bar{j}\}$  всякий другой базис  $\{\bar{i}^*, \bar{j}^*\}$  получается из исходного поворотом плоскости  $E_2$

вокруг точки  $O$  на угол  $\varphi$ . А так как угол  $\varphi$  меняется в пределах  $(0, 2\pi)$ , то

базисов  $\{\bar{i}^*, \bar{j}^*\}$  существует бесконечно много.



#### 1.4. Метрические пространства

Пусть  $M = \{x, y, \dots\}$  – произвольное непустое множество (не обязательно, чтобы его элементы  $x, y, \dots$  образовывали линейное пространство). Говорят, что на множестве  $M$  определена *структура метрического пространства*, если для любых элементов  $x, y \in M$  задана функция  $\rho(x, y)$ , удовлетворяющая следующим аксиомам:

- 1°.  $\rho(x, y) \geq 0$ ,  $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ;
- 2°.  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$  (аксиома симметрии);
- 3°.  $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$  (неравенство треугольника).

Функция  $\rho(x, y)$  называется *метрической*, а число  $\rho(x, y)$  называется *метрикой* или *расстоянием* между  $x$  и  $y$ .

Метрическое пространство символически записывается  $(M, \rho)$ , где  $M$  – множество, а  $\rho$  – метрическая функция на нем.

**п°1.** Мы пока встречались только с одним примером метрического пространства – евклидовым пространством  $E_n$ . Если в  $E_n$  взять векторы  $\bar{x}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $\bar{y}(y_1, y_2, \dots, y_n)$ , то расстояние между ними определяется по формуле

$$\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{(\bar{y} - \bar{x}, \bar{y} - \bar{x})} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Заметим, что в пространстве  $E_n$  для любых векторов  $\bar{x}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $\bar{y}(y_1, y_2, \dots, y_n)$  справедливо *неравенство Коши-Буняковского*:

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \sqrt{\left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right)}.$$

Отметим также, что евклидова метрика предполагает трудоемкие вычисления. Поэтому были найдены иные приемлемые формулы для  $\rho(\bar{x}, \bar{y})$ . В частности, для конечномерных линейных пространств  $L_n$  расстояние между  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  можно ввести так:

- п°2.  $\rho_2(\bar{x}, \bar{y}) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$  – метрика Чебышёва;

$$\text{п}^\circ\text{3. } \rho_3(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|.$$

Заметим, что  $\rho_2$  – самая простая метрика. По сравнению с евклидовой она считается очень легко.

**п<sup>о</sup>4.** Для матриц  $A = (a_{ij})$  и  $B = (b_{ij})$  порядка  $m \times n$  можно было бы ввести расстояние в евклидовой метрике:

$$\rho(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (a_{ij} - b_{ij})^2}.$$

Но какую вычислительную работу надо проводить! Поэтому желательно рассмотреть более простые метрики, например, метрику Чебышёва:

$$\rho_1(\bar{x}, \bar{y}) = \max_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} |a_{ij} - b_{ij}|.$$

Для анализа линейных систем часто оперируют нормами матриц. Их можно определить так:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq i \leq m} \left( \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right), \quad \|A\|_2 = \max_{1 \leq j \leq m} \left( \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \right).$$

$\|A\|_1$  и  $\|A\|_2$  – это соответственно максимум среди сумм абсолютных величин элементов строк или столбцов матрицы  $A$ . Например,

$$\|A\|_1 = \left\| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \right\| = \max\{3, 8\} = 8; \quad \|A\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \right\| = \max\{4, 7\} = 7.$$

**п<sup>о</sup>5.** На множестве  $C[a, b]$  непрерывных на отрезке  $[a, b]$  функций расстояние  $\rho$  между элементами  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  вычисляется так:

$$\rho(f, \varphi) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - \varphi(x)|.$$

При этом метрическая функция  $r(f, \varphi)$  демонстрирует *максимальное уклонение* функции  $f(x)$  от функции  $\varphi(x)$  на отрезке  $[a, b]$ . На рис. 1.1  $\rho(f, \varphi)$  – это уклонение  $AB$  – самый большой зазор между графиками функций  $f$  и  $\varphi$  на  $[a, b]$ .

**п<sup>о</sup>6.**  $C^n[a, b]$  – это множество функций, имеющих на отрезке  $[a, b]$  непрерывные производные до  $n$ -го порядка включительно.

На  $C^n[a, b]$  метрическая функция определяется так:

$$\rho(f, \varphi) = \max_{x \in [a, b]} \{ |f(x) - \varphi(x)|, |f'(x) - \varphi'(x)|, \dots, |f^{(n)}(x) - \varphi^{(n)}(x)| \}.$$

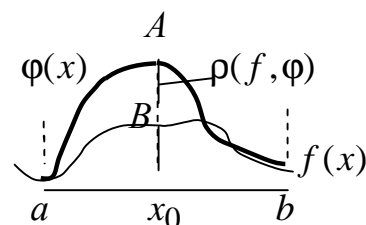


Рис. 1.1.

Здесь просматриваются зазоры не только между значениями функций  $f(x)$  и  $\varphi(x)$ , но и между всеми производными от этих функций до  $n$ -го порядка включительно, и выбирается максимальный из них.

**п°7. Метрика Хэмминга.** Информация, передаваемая по каналам связи с одного компьютера на другой, обычно записывается в виде вектора  $\bar{x}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , где  $x_i$  равно либо 0, либо 1. Рассмотрим линейное пространство  $L_n$  векторов  $\bar{x}$  над полем  $F_2(0;1)$  двух чисел – 0 и 1. Операции  $\oplus$  и  $\otimes$  в этом поле таковы:

$$\begin{aligned} 0 \oplus 0 &= 0, & 0 \otimes 0 &= 0, \\ 0 \oplus 1 &= 1, & 1 \otimes 0 &= 0, \\ 1 \oplus 0 &= 1, & 0 \otimes 1 &= 0, \\ 1 \oplus 1 &= 0, & 1 \otimes 1 &= 1. \end{aligned}$$

В роли числа, противоположного к 1, выступает 1.

Например,  $\bar{x}(0,1,0,0,0,0,1)$  – вектор из  $L_8$ , а  $\bar{x}(1,0,1,1)$  – вектор из  $L_4$ .

Расстояние между  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  обозначается  $\text{dist}(\bar{x}, \bar{y})$  (сокращенно от англ. *distance*), равно числу различий в координатах векторов  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  и называется *метрикой Хэмминга*.

Пусть, например,  $\bar{x}=(1,0,1,1)$ ,  $\bar{y}=(0,1,1,0)$ . У этих векторов третьи координаты одинаковы, а остальные различны. Поэтому  $\text{dist}(\bar{x}, \bar{y})=3$ . Если же  $\bar{x}=(1,0,0,0,0,0,1,0)$ ,  $\bar{y}=(0,1,1,0,0,1,0,1)$ , то  $\text{dist}(\bar{x}, \bar{y})=5$ .

Можно убедиться в том, что аксиомы 1° - 3° метрического пространства выполняются для множества  $L_n$  и метрики Хэмминга.

Выясним, чему равна норма  $\|\bar{x}\|$  вектора  $\bar{x}$ .  $\|\bar{x}\|$  – это, фактически, норма разности вектора  $\bar{x}$  и нулевого вектора или, другими словами, это расстояние от вектора  $\bar{x}$  до нулевого вектора. Поэтому  $\|\bar{x}\|$  равна числу ненулевых координат вектора  $\bar{x}$ . Например,  $\|\bar{x}(0,1,0,1,1,0,0,0)\|=4$ .

**п°8.** Пусть  $V = \{\bar{x}(x_n), \bar{y}(x_n), \dots\}$  – множество ограниченных последовательностей:

$$\begin{aligned} \bar{x}(x_n) &= x_1, x_2, \dots, x_n, \dots; \quad |x_i| \leq X, i = 1, 2, \dots, X \in \mathbf{R}; \\ \bar{y}(y_n) &= y_1, y_2, \dots, y_n, \dots; \quad |y_i| \leq Y, i = 1, 2, \dots, Y \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

На  $V$  метрическая функция вводится так:

$$r(\bar{x}, \bar{y}) = \max_{n=1,2,\dots} |x_n - y_n|, \bar{x}, \bar{y} \in V.$$

### 1.5. Полнота метрического пространства $(X, \rho)$

Пусть  $(X, \rho)$  – метрическое пространство.

**Определение 1.9.** Последовательность

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

элементов метрического пространства  $(X, \rho)$  называется *фундаментальной последовательностью* или *последовательностью Коши*, если  $\rho(x_n, x_m) \rightarrow 0$  при  $n$  и  $m \rightarrow \infty$  ( $n$  и  $m$  – натуральные числа).

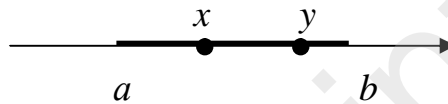
**Определение 1.10.** Метрическое пространство  $(X, \rho)$  называется *полным*, если в нем любая фундаментальная последовательность сходится к пределу, являющемуся элементом этого пространства.

Рассмотрим простой пример.

Пусть  $X = (a, b)$  – это интервал, а метрика

$\rho(x, y) = |x - y|$  – обычное расстояние

между точками  $x$  и  $y$  на прямой.



Рассмотрим какую-нибудь последовательность  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ , сходящуюся к точке  $a$ . Точка  $a$  не принадлежит пространству  $(X, \rho)$ . Поэтому данное метрическое пространство неполное. Для того, чтобы получить полное метрическое пространство, надо дополнить  $X$  концами интервала, т.е. точками  $a$  и  $b$ . Итак, если  $X = [a, b]$ , то  $(X, \rho)$  – полное метрическое пространство.

## 1.6. Пространство Гильберта

В параграфе 1.3 была введена операция скалярного произведения в действительном линейном пространстве. Аналогичную операцию можно также ввести и на комплексном линейном пространстве.

**Определение 1.11.** Будем говорить, что на комплексном линейном пространстве  $H$  задана операция *скалярного произведения*, если каждой паре векторов  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  из  $H$  сопоставляется комплексное число  $(\bar{x}, \bar{y})$  так, что  $\forall \bar{x}, \bar{y}, \bar{x}_1, \bar{x}_2 \in H$  и  $\forall a \in \mathbb{C}$  выполняются аксиомы:

1°.  $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{y}, \bar{x})^*$  (знак  $*$  означает комплексное сопряжение);

2°.  $(\bar{x}_1 \oplus \bar{x}_2, \bar{y}) = (\bar{x}_1, \bar{y}) + (\bar{x}_2, \bar{y})$ ;

3°.  $(a \otimes \bar{x}, \bar{y}) = a(\bar{x}, \bar{y})$ ;

4°.  $(\bar{x}, \bar{x}) = \bar{x}^2 \geq 0, (\bar{x}, \bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = 0$ .

Как и в случае действительного линейного пространства, число  $(\bar{x}, \bar{y})$  называется *скалярным произведением* векторов  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ ,  $(\bar{x}, \bar{x})$  – *скалярным квадратом* вектора  $\bar{x}$ .

Так как для произвольного вещественного числа  $s$  справедливо равенство  $s = s^*$  и  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ , то система аксиом определения 1.7 является частным случаем системы аксиом определения 1.11.

По аналогии с евклидовым пространством в комплексном линейном пространстве  $H$  с введенной операцией скалярного произведения определяется норма вектора и расстояние между векторами:

1) *норма* вектора  $\bar{x}$ :

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{(\bar{x}, \bar{x})};$$

2) расстояние между векторами  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ :

$$\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \|\bar{x} - \bar{y}\| = \sqrt{(\bar{x} - \bar{y}, \bar{x} - \bar{y})}. \quad (1.2)$$

Метрика, задаваемая формулой (1.2), называется *метрикой, порожденной скалярным произведением*.

**Определение 1.12.** Комплексное линейное пространство  $H$  называется *пространством Гильберта*, если выполнены следующие условия: 1) на  $H$  задано скалярное произведение; 2)  $H$  – полное метрическое пространство относительно метрики, порожденной скалярным произведением.

Многие сигналы, возникающие в радиотехнике, принадлежат пространству  $L_2(-\infty, \infty)$ . Через  $L_2(-\infty, \infty)$  в математике принято обозначать множество функций, интегрируемых с квадратом на интервале  $(-\infty, \infty)$ , т.е.  $L_2(-\infty, \infty) = \{f(x), g(x), \dots\}$  такое множество, что для  $\forall f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$  спра-

ведливо условие  $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx < \infty$ .

Если  $s(t) \in L_2(-\infty, \infty)$ , то

$$\|s(t)\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) dt}$$

в случае вещественного сигнала и

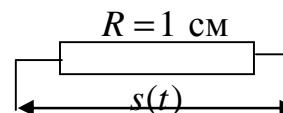
$$\|s(t)\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot s^*(t) dt},$$

где  $s^*(t)$  – комплексно-сопряженное значение к  $s(t)$ , в случае комплексного сигнала  $s(t)$ .

*Квадрат нормы сигнала  $s(t)$  носит название «энергии» сигнала и обозначается  $E_s$ :*

$$E_s = \|s(t)\|^2.$$

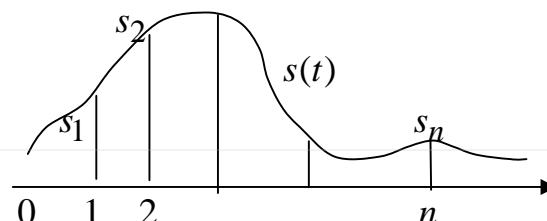
Именно такая энергия выделяется в резисторе с сопротивлением 1 ом, если на его зажимы подано напряжение  $s(t)$ .



Несложно заметить, что если мы будем рассматривать сигналы  $s(t)$  такие, что

- 1)  $s(t)$  существует только при  $t > 0$ ,
- 2)  $s(t)$  имеет конечную энергию, т.е.  $E_s < \infty$ ,

и отмечать значения таких сигналов только в определенные моменты времени  $t = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$ , то получим множество последовательностей



$$l_2 = \{\bar{x}(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), \bar{y}(y_1, y_2, \dots, y_n, \dots), \dots, \bar{s}(s_1, s_2, \dots, s_n, \dots), \dots\},$$

для которых выполняются условия

$$\sum_1^{\infty} s_i^2 < \infty, \sum_1^{\infty} x_i^2 < \infty, \sum_1^{\infty} y_i^2 < \infty, \text{ если } s_i, x_i, y_i - \text{ вещественные,}$$

и

$$\sum_1^{\infty} s_i s_i^* < \infty, \sum_1^{\infty} x_i x_i^* < \infty, \sum_1^{\infty} y_i y_i^* < \infty, \text{ если } s_i, x_i, y_i - \text{ комплексные.}$$

Скалярное произведение элементов  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ ,  $\bar{x}, \bar{y} \in l_2$ , вводится по формуле

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_1^{\infty} x_i y_i^*, \quad (1.3)$$

а норма элемента  $\bar{x} \in l_2$  вычисляется так:

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i x_i^*}.$$

Множество  $l_2$  со скалярным произведением (1.3) будет неполным гильбертовым пространством  $H^0$ .  $H^0$  называют пространством *импульсных сигналов с конечной энергией*.

### Задачи для самостоятельного решения

**Задача 1.** Образует ли действительное (комплексное) линейное пространство заданное множество  $M$  элементов, в котором определены операции  $\oplus$  сложения и  $\otimes$  умножения элемента на число. Если не оговорено противное, то  $\oplus$  и  $\otimes$  – обычные операции сложения и умножения на число элементов множества  $M$ .

1. Множество функций  $F = \{f(t), j(t), \dots, g(t), \dots\}$ , принимающих только положительные значения и непрерывных на отрезке  $[a, b]$ .

$$\oplus: f(t) \oplus j(t) = f(t) \cdot j(t), \otimes: I \otimes f(t) = [f(t)]^I.$$

2. Множество всех нечетных функций  $F_n = \{f(t), j(t), \dots\}$ ,  $t \in [-1, 1]$ .

3. Множество всех вещественных диагональных матриц

$$M = \left\{ A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \\ 0 & & a_{mm} \end{pmatrix}, \dots \right\}.$$

**Задача 2.** Если пространство в задаче 1 линейно, то найти его базис и определить размерность.

**Задача 3.** Исследовать на линейную зависимость систему векторов:

а)  $a = (0, 1, 1), b = (1, 0, 1), c = (1, 1, 0)$ ; б)  $a = 1, b = x, c = x^2, d = (1 + x)^2, x \in (-\infty, \infty)$ .

**Отв.:** а) независима; б) зависима.

**Задача 4.** Найти расстояние между  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  по формулам

$$r_2(\bar{x}, \bar{y}) = \max_{i=1,2,\dots,n} (|y_i - x_i|), \quad r_3(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^n |y_i - x_i|.$$

- 1)  $\bar{x}(1, -7, 2, 5)$ ,  $\bar{y}(11, 12, -1, 3)$ ; 2)  $\bar{x}(7, 11, 15, -1)$ ,  $\bar{y}(0, 7, 8, -2)$ ;  
3)  $\bar{x}(2, 10, 7, 13)$ ,  $\bar{y}(-1, 8, 1, 3)$ .

**Задача 5.**  $M = \{A = (a_{ij}), \dots\}$  множество матриц размерности  $m \times n$ ,  $i = 1, \bar{m}$ ;  $j = 1, \bar{n}$ . Найти  $\|A\|_1$  и  $\|A\|_2$ , если

1) а)  $A = \begin{pmatrix} 2 & -17 \\ -11 & 3 \end{pmatrix}$ ; б)  $A = \begin{pmatrix} 2-i & 1+i\sqrt{3} \\ i & -1+i \end{pmatrix}$ ;

2) а)  $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 7 & -11 \end{pmatrix}$ ; б)  $A = \begin{pmatrix} 1-i & i \\ -2i & 3-i \end{pmatrix}$ ;

3) а)  $A = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 3 & -11 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$ ; б)  $A = \begin{pmatrix} 2+i & -i \\ 7-i & 1+i \end{pmatrix}$ .

**Задача 6.** Известно, что  $f, j \in C[a, b]$ . Найти  $r(f, j)$  и изобразить  $\rho$  графически.

- 1)  $f(x) = x^2 + 1$ ,  $\varphi(x) = 2x$ ,  $x \in [0, 1]$ ; 2)  $f(x) = e^x$ ,  $\varphi(x) = x - 1$ ,  $x \in [0, 1]$ ;  
3)  $f(x) = \cos$ ,  $\varphi(x) = 1$ ,  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

**Задача 7.** Известно, что  $f, j \in C^1[a, b]$ . Найти  $r(f, j)$ , если  $f$  и  $j$  такие же, как в задаче 6.

**Задача 8.** Найти норму дискретного сигнала  $\bar{S}$ ,  $\bar{S} = (S_1, S_2, \dots, S_n, \dots) \in l_2$ .

1)  $\bar{S} \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \dots, \frac{1}{2\sqrt{n}}, \dots \right)$ ; 2)  $\bar{S} \left( \frac{1}{3}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \dots, \frac{1}{3\sqrt{n}}, \dots \right)$ ;

3)  $\bar{S} \left( e^{-1}, \frac{e^{-2}}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}, \dots \right)$ .

**Задача 9.** На множестве  $L_8$  векторов  $\bar{x}$  над полем  $F_2(0;1)$  введена метрика Хэмминга  $r_x$ . Найти  $r_x(\bar{x}, \bar{y})$  и  $\|\bar{x}_x\|$ ,  $\|\bar{y}\|_x$ , если

- 1)  $\bar{x}(1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0)$ ,  $\bar{y}(0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1)$ ;  
2)  $\bar{x}(0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1)$ ,  $\bar{y}(1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$ ;  
3)  $\bar{x}(1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1)$ ,  $\bar{y}(1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1)$ .



## § 2. Обобщенный ряд Фурье, интеграл Фурье, преобразование Фурье

### 2.1. Обобщенный ряд Фурье

Француз Жан Батист Жозеф Фурье (1768 – 1830 г.), ровесник Наполеона, участвовавший вместе с ним в военных походах, а потом разочаровавшийся в войнах, как действиях, недостойных человечества, занялся математикой и открыл в ней новую эру. Он первым обратил внимание на *ортгональность* на отрезке  $[-p, p]$  тригонометрической системы функций

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots \quad (2.1)$$

и для функции  $f(x)$ , заданной на этом отрезке и удовлетворяющей определенным условиям, построил тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

который теперь носит его имя.

Напомним, что через  $L_2[a, b]$  обозначается множество функций, интегрируемых с квадратом на отрезке  $[a, b]$ , т.е. если  $f \in L_2[a, b]$ , то  $\int_a^b f^2(x) dx < \infty$ .

В пространстве  $L_2[a, b]$  скалярное произведение функций  $f(x)$  и  $g(x)$ ,  $f, g \in L_2[a, b]$ , определяется по формуле

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx.$$

Функции  $f$  и  $g$  считаются *ортгональными*, если

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = 0.$$

Пусть в пространстве  $L_2[a, b]$  задана ортгональная система функций

$$j_1(x), j_2(x), \dots, j_n(x), \dots, \quad (2.2)$$

такая, что

$$(j_n(x), j_m(x)) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq m; \\ 1_m > 0, & \text{если } n = m. \end{cases} \quad (2.3)$$

Теоретически доказано, что *любую* функцию  $f(x) \in L_2[a, b]$  можно представить в виде ряда

$$f(x) = a_1 j_1(x) + a_2 j_2(x) + \dots + a_n j_n(x) + \dots \quad (2.4)$$

При этом коэффициенты  $a_m$  находятся по формуле:

$$a_m = \frac{(f, j_m)}{(j_m, j_m)}. \quad (2.5)$$

Отметим, что если в выражении (2.3) все  $\mathbf{1}_m = 1$ , то система (2.2) является ортонормированной системой. В этом случае  $a_m$  вычисляется так:

$$a_m = (f, \mathbf{j}_m).$$

Ряд (2.4) с коэффициентами (2.5) называется *обобщенным рядом Фурье*, а набор коэффициентов  $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$  – *спектром* функции  $f(x)$  в базисе (2.2).

Пусть для функции  $f(x)$  задан обобщенный ряд Фурье (2.4) по системе функций (2.2). Известно, что *наилучшей в среднеквадратичном смысле полиномиальной аппроксимацией* функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  будет  $n$ -ая частичная сумма  $S_n(x)$  обобщенного ряда Фурье (2.4). Другими словами, если нужно найти многочлен

$$P_n(x) = c_1 \mathbf{j}_1(x) + c_2 \mathbf{j}_2(x) + \dots + c_n \mathbf{j}_n(x),$$

для которого *среднеквадратичное уклонение*

$$d_n^2 = \int_a^b (f(x) - P_n(x))^2 dx$$

от функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  минимально, то  $P_n(x)$  – это  $n$ -ая частичная сумма  $S_n(x)$  обобщенного ряда Фурье (2.4):

$$f(x) \approx P_n(x) = a_1 \mathbf{j}_1(x) + a_2 \mathbf{j}_2(x) + \dots + a_n \mathbf{j}_n(x) = S_n(x). \quad (2.6)$$

Этот факт называют *минимальным свойством коэффициентов Фурье* (2.5).

Заметим, что если сигнал  $f(x)$  требуется представить приближенно, используя только функции  $\mathbf{j}_1(x), \mathbf{j}_2(x), \dots, \mathbf{j}_n(x)$ , то наилучшее приближение, как сказано выше, имеет вид (2.6). Если же необходимо учесть еще одну функцию  $\mathbf{j}_{n+1}(x)$ , то

$$f(x) \approx S_n(x) + a_{n+1} \mathbf{j}_{n+1}(x). \quad (2.7)$$

Замечательно, что в приближении (2.7) по сравнению с приближением (2.6) нужно найти только один коэффициент  $a_{n+1}$ .

**Определение 2.1.** Ортогональная система функций (2.2) на отрезке  $[a, b]$  называется *полной* на множестве функций  $L_2[a, b]$ , если в  $L_2[a, b]$  не существует функции  $\mathbf{j}(x)$ , которая была бы ортогональна системе  $\{\varphi_n(x)\}$ , т.е. для которой выполнялись бы равенства

$$(\varphi_n, \varphi) = 0 \quad \text{при} \quad \forall n \in N.$$

Заметим, что тригонометрическая система (2.1) полная на отрезке  $[-\pi, \pi]$ .

Справедлива

**Теорема 2.1.** Если ортогональная система функций

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots, \quad (*)$$

заданных на отрезке  $[a, b]$ , полная, то для любой функции  $f(x) \in L_2[a, b]$  выполняется равенство Парсеваля-Стеклова

$$\|f\|^2 = \sum_1^{\infty} a_n^2 \|j_n\|^2.$$

Если же ортогональная система функций (\*) неполная, то для любой функции  $f(x) \in L_2[a, b]$  выполняется неравенство Бесселя

$$\|f\|^2 \geq \sum_1^{\infty} a_n^2 \|j_n\|^2.$$

Отметим, что если система функции (2.2) ортонормированна, т.е.  $\|\varphi_i\| = 1$  для всех  $i$ , то равенство Парсеваля-Стеклова записывается очень просто:

$$\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2.$$

**Замечание.** Существует бесконечно много ортогональных систем функций, заданных на отрезке  $[a, b]$ . Так, для отрезка  $[-1, 1]$  ортогональные системы были построены П.Ф. Чебышевым, Эрмитом, Лежандром, Уолшем и рядом других математиков.

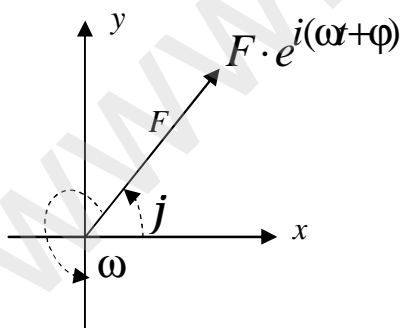
## 2.2. Комплексное колебание

Мы уже познакомились с обобщенным рядом Фурье по разным ортогональным системам функций. Но все же тригонометрическая ортогональная система функций, открытая Фурье, хорошо работает в инженерной практике и поэтому для нас пока предпочтительней.

Отметим, что радиоинженеру удобно работать с комплексным колебанием

$$F \cdot e^{i(\omega t + \varphi)} = F \cos(\omega t + \varphi) + iF \sin(\omega t + \varphi),$$

которое можно изобразить в виде вектора длины  $F$ , исходящего из начала координат комплексной плоскости под углом  $\varphi$  к вещественной оси. Мыслится он вращающимся с угловой скоростью  $\omega$  вокруг точки  $(0,0)$ .

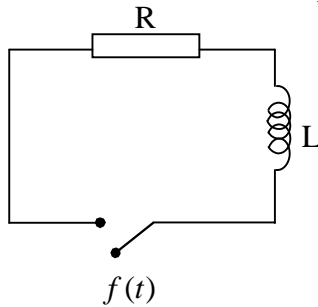


Рассмотрим электрическую цепь, состоящую из последовательно соединенных элементов:  $R$  – омическое сопротивление,  $L$  – катушка самоиндукции,  $f(t)$  – подаваемое в цепь напряжение. Дифференциальное уравнение цепи имеет вид

$$L \frac{di(t)}{dt} + R \cdot i(t) = f(t), \quad (2.8)$$

где  $i(t)$  – сила тока в цепи.

Рассмотрим несколько частных случаев уравнения (2.8).



**I случай.** Пусть заданы две электрические цепи, для одной из которых  $f(t) = F \cos(\omega t + j)$ , а для второй –  $f(t) = F \sin(\omega t + j)$ . Система дифференциальных уравнений, описывающая эти цепи, имеет вид:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = F \cos(\omega t + \varphi) \quad (2.9)$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri = F \sin(\omega t + \varphi). \quad (2.10)$$

Умножим уравнение (2.10) на  $i$  и прибавим к уравнению (2.9). В результате получим:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = F \cdot e^{i(\omega t + \varphi)}. \quad (2.11)$$

Частное решение уравнения (2.11) будем искать в виде

$$i(t) = J \cdot e^{i(\omega t + \varphi)}.$$

Подставляя  $i(t)$  в уравнение (2.11), получим

$$(Li\omega + R)J e^{i(\omega t + \varphi)} = F e^{i(\omega t + \varphi)},$$

откуда  $i(t) = \frac{F \cdot e^{i(\omega t + \varphi)}}{R + iL\omega}$ .

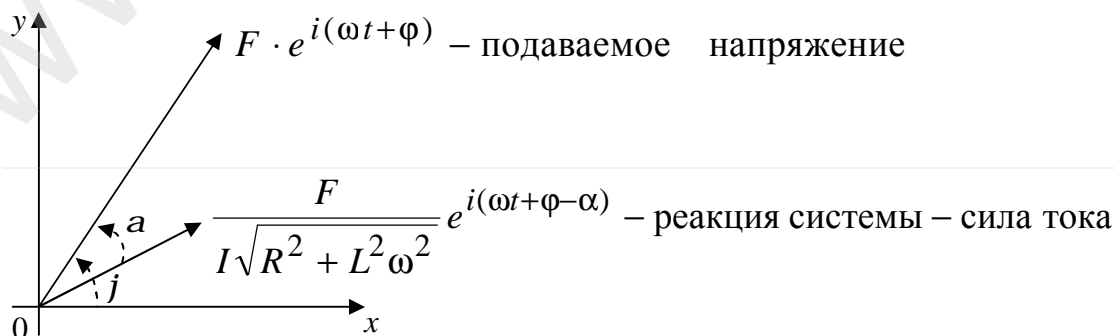
Представляя число  $R + iL\omega$  в показательной форме

$$R + iL\omega = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \cdot e^{i\alpha},$$

где  $\alpha = \arg(R + iL\omega)$ , окончательно найдем

$$i(t) = \frac{F}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} e^{i(\omega t + \varphi - \alpha)}. \quad (2.12)$$

Сила тока (2.12) оказывается комплексным колебанием и ее можно изобразить вектором:



Теперь, проектируя оба вектора на вещественную ось, получим решение уравнения (2.9), а проектируя на мнимую ось, найдем решение уравнения (2.10). Можно подобрать параметры цепи  $L$  и  $R$  так, чтобы угол  $\alpha$  был равен, например,  $90^\circ$ , а модуль  $\frac{F}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}}$  принимал заданное значение.

**II случай.** Пусть подаваемое в цепь напряжение  $f(t)$  есть периодическая функция периода  $T = 2l$ . Тогда его можно представить рядом Фурье

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} t + b_n \sin \frac{n\pi}{l} t$$

и, воспользовавшись формулами Эйлера

$$\cos \frac{n\pi}{l} t = \frac{e^{in\pi t/l} + e^{-in\pi t/l}}{2}, \quad \sin \frac{n\pi}{l} t = \frac{e^{in\pi t/l} - e^{-in\pi t/l}}{2i},$$

записать в комплексной форме

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi t/l}.$$

Уравнение (2.11) перепишется в виде:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi t/l}.$$

Учитывая предыдущие рассуждения, частное решение запишем в виде

$$i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n e^{-i\alpha}}{\sqrt{R^2 + L^2 (n\pi/l)^2}} \cdot e^{in\pi t/l}, \quad \alpha = \arg\left(R + iL \frac{n\pi}{l}\right).$$

**III случай.** Пусть теперь подаваемое в цепь напряжение  $f(t)$  можно представить интегралом Фурье в комплексной форме

$$f(t) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{iwt} dw. \quad (2.13)$$

Здесь  $F(w)$  – спектральная плотность нашей функции  $f(t)$ :

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iwx} dx. \quad (2.14)$$

Тогда уравнение (2.11) перепишется в виде

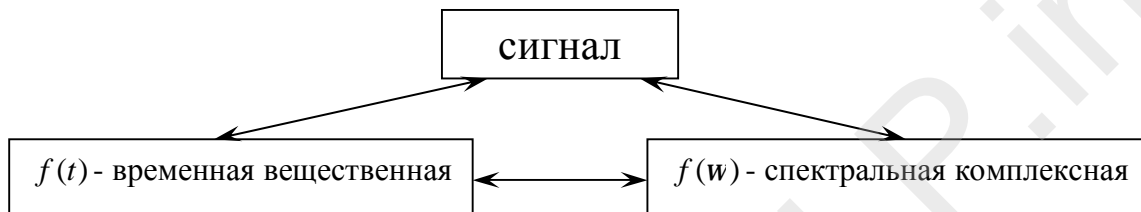
$$L \frac{di}{dt} + Ri = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{iwt} dw.$$

Учитывая предыдущие рассуждения, по аналогии выписываем частное решение

$$i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega) \cdot e^{-i\alpha}}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \cdot e^{i\omega t} d\omega.$$

Формула (2.14) демонстрирует *прямое преобразование Фурье*, а формула (2.13) – *обратное преобразование Фурье*.

Напряжение  $f(t)$ , подаваемое в электрическую цепь, можно назвать сигналом. Из рассуждений, проведенных выше, следует, что *сигнал* имеет две математические характеристики:  $f(t)$  – временная вещественная и  $F(\omega)$  – спектральная комплексная:



### 2.3. Преобразование Фурье

В формуле (2.14) частота  $\omega$  измеряется в радианах. Введем в рассмотрение вместо  $\omega$  частоту  $\omega_1$ , выраженную в герцах. Величины  $\omega$  и  $\omega_1$  связаны соотношением

$$\omega = 2\pi\omega_1,$$

где  $\omega$  – число радиан в секунду,  $\omega_1$  – число полных кругов в секунду. Тогда обе формулы (2.14) и (2.13) прямого и обратного преобразований Фурье будут выглядеть одинаково:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega_1) e^{i2\pi\omega_1 t} d\omega_1, \quad F(\omega_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi\omega_1 x} dx$$

Далее будем иметь дело только с частотой, выраженной в герцах. Поэтому нижний индекс в  $\omega_1$  будем опускать.

#### Задачи для самостоятельного решения

**Задача 1.** Является ли ортонормированной система функций

$$f_n(x) = \begin{cases} 2^{n/2}, & \text{если } x \in [2^{-n}, 2^{-n+1}], \\ 0, & \text{при других } x \in [0,1], \end{cases}$$

**Задача 2.** Разложить в ряд Фурье по базису  $\{e_n = e^{2\pi i n x}\}$  функцию

а)  $f(x) = \text{sgn}(2x - 1)$ ;      б)  $f(x) = e^{lx}$ .



$$A(x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \bar{e}_n) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) \bar{e}'_1 + \\ + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n) \bar{e}'_2 + \dots + (a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n) \bar{e}'_m.$$

В правой части полученного равенства записан вектор  $\bar{y}$ , представленный в виде линейной комбинации по базисным векторам.

Из последнего равенства легко следует, что имеют место соотношения

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n,$$

$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n,$$

.....

$$y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n,$$

которые удобно записывать в матричной форме

$$Y = AX,$$

где  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \mathbf{M} \\ y_m \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \mathbf{M} \\ x_m \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \mathbf{K} & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{ij} & \dots \\ a_{m1} & \mathbf{K} & a_{mn} \end{pmatrix}$ ,  $Y, X$  – столбцовые матрицы, а

$A = (a_{ij})$  – матрица порядка  $m \times n$ .

Итак, если в пространствах  $L_n$  и  $L_m$  зафиксированы базисы, то каждому оператору  $A$  можно поставить в соответствие матрицу  $A$ .

Пусть  $A: L_n \rightarrow L_n$  – линейный оператор.

**Определение 3.2.** Число  $\lambda$  называется *собственным значением* оператора  $A$ , если уравнение

$$A(\bar{x}) = \lambda \bar{x}$$

имеет ненулевое решение  $\bar{x} \in L_n$ . Вектор  $\bar{x}$  при этом называется *собственным вектором* оператора  $A$ .

Оказывается, что у любого линейного оператора  $A$  с симметрической матрицей, действующего из пространства  $L_n$  в  $L_n$ , существует  $n$  линейно независимых векторов  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ , соответствующих собственным значениям  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Если в пространстве  $L_n$  определена операция скалярного произведения (т.е.  $L_n$  – евклидово пространство), то собственные векторы  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$  образуют ортогональную систему, нормировав которую мы получим ортонормированный базис пространства  $L_n$ . В этом базисе матрица оператора  $A$  имеет простейший – канонический – вид:



$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0\mathbf{K} & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0\mathbf{K} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0\mathbf{K} & \lambda_n \end{pmatrix}$$

На главной диагонали матрицы  $\tilde{A}$  стоят собственные значения матрицы  $A$ .

Если же матрица оператора  $A$  не симметрическая, то в пространстве  $L_n$  существует базис, составленный из собственных векторов оператора  $A$ , в котором матрица этого оператора имеет клеточно-диагональный вид:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \boxed{\phantom{0}} & & & 0 \\ & \boxed{\phantom{0}} & & \\ & & \boxed{\phantom{0}} & \\ & & & \mathbf{O} \\ & 0 & & \boxed{\phantom{0}} \end{pmatrix}$$

Каждая клетка на диагонали носит название клетки Жордана и имеет вид

$$\begin{pmatrix} I_i & 1 & 0\mathbf{K} & 0 \\ 0 & I_i & 1\mathbf{K} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0\mathbf{K} & I_i \\ 0 & 0 & 0\mathbf{K} & I_i \end{pmatrix}$$

На главной диагонали в клетке Жордана стоит собственное значение  $\lambda_i$  оператора  $A$ . Над главной диагональю расположена диагональ из единиц, а все остальные элементы матрицы равны нулю.

Заметим, что если приходится иметь дело с линейными преобразованиями, то, конечно, рассматривать их удобнее в каноническом базисе из собственных векторов.

Приведем примеры линейных операторов, встречающихся в различных областях математики.

1) Линейное дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка записывается так:

$$L(y) \equiv a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f. \quad (3.2)$$

Оператор  $L$ , преобразующий функцию  $y(x)$  в функцию  $f(x)$ , линеен.

2) В операционном исчислении мы имели дело с оператором Лапласа

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt = F(p),$$

который является линейным.

3) Интегральные операторы

$$J[y(x)] \equiv \int_0^x a(t)y(t) dt = f(x);$$

$$J[y(x)] \equiv a(x)y(x) + \int_a^b K(x,t)y(t) dt = f(x)$$

линейны.

4) В математической физике часто приходится иметь дело с линейными дифференциальными операторами функций многих переменных. Рассмотрим примеры.

а) уравнение теплопроводности

$$D[u(x,t)] \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g(x,t)$$

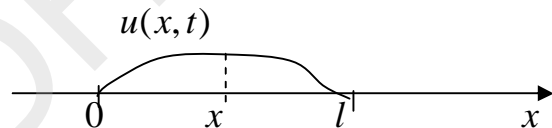
описывает распределение тепла в стержне, расположенном на отрезке  $[0, l]$  оси  $x$  со временем  $t$ .



б) Уравнение колебаний струны имеет вид

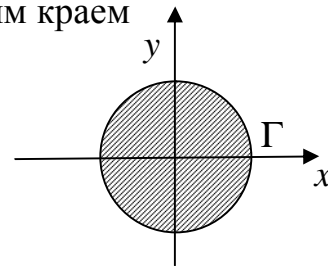
$$D[u(x,t)] \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g(x,t).$$

При этом предполагается, что в спокойном состоянии струна занимает отрезок  $[0, l]$  оси  $Ox$ , а в момент времени  $t$  – положение  $u(x, t)$ .



в) Колебания круглой мембраны с закрепленным краем описываются уравнением

$$D[u(x, y)] \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$



Если расположение точек края  $\Gamma$  мембраны задается функцией  $\varphi(x, y)$ , то среди всех решений указанного уравнения выбирается такое, что  $u(x, t)|_{\Gamma} = \varphi(x, y)$ .

В примерах а) – в) оператор  $D$  линеен.

В теории обыкновенных дифференциальных уравнений показано, что множество решений однородного дифференциального уравнения

$$L(y) \equiv a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0, \quad (3.3)$$

соответствующего линейному неоднородному уравнению (3.2), образует линейное пространство. И если известно  $n$  линейно независимых частных решений

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \quad (3.4)$$

называемых *собственными функциями* оператора  $L$ , то общее решение уравнения (3.3) представляется в виде:

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x).$$

где  $c_1, c_2, \dots, c_n$  – произвольные постоянные.

Другими словами, функции (3.4) образуют базис пространства решений уравнения (3.3). Аналогичным свойством обладают и собственные функции других дифференциальных и интегральных операторов

Рассмотрим некоторые простейшие уравнения математической физики и познакомимся с методом Фурье, позволяющим в каждом конкретном случае найти собственные функции и построить общее решение.

### 3.2. Обзор задач математической физики. Метод Фурье

Математическая физика – это теория математических моделей физических процессов. Многие из них описываются дифференциальными уравнениями в частных производных. Поэтому эти уравнения и носят название уравнений математической физики. Они подразделяются на три класса.

#### I. Уравнения колебаний (*гиперболический тип*)

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + g(x, y, z, t), \quad (3.4)$$

описывают звуковые и электромагнитные колебания, колебания струны, стержня, мембраны и т.д.

Если  $\rho = 1$ ,  $p = a^2 = \operatorname{const}$ ,  $q = 0$ , то (3.4) переписывается так:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t), \quad (3.5)$$

В (3.5)  $\Delta u$  – это *оператор Лапласа*.

#### II. Уравнение диффузии (*параболический тип*)

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + g(x, y, z, t), \quad (3.6)$$

описывает процессы диффузии газов, распределения тепла в пространстве.

Если  $\rho = 1$ ,  $p = a^2 = \operatorname{const}$ ,  $q = 0$ , то получаем *уравнение теплопроводности*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + g(x, y, z, t).$$

III. Для стационарных (не зависящих от времени) процессов уравнения (3.4) и (3.6) превращаются в уравнения *эллиптического типа*

$$0 = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + g(x, y, z, t).$$

Если  $\rho = 1$ ,  $q = 0$ , то это *уравнение Пуассона*

$$\Delta u = -g(x, y, z, t).$$

Если еще и  $g \equiv 0$ , то имеем *уравнение Лапласа*

$$\Delta u = 0.$$

Каждое из названных уравнений имеет бесконечно много решений. Для описания реального процесса надо задать *начальные условия* и *краевые условия* на границе области, в которой рассматривается процесс. Поэтому такие задачи называются *краевыми*.

Рассмотрим решение задачи (3.5) в одномерном случае ( $y = z = 0$ ):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x, t).$$

**Задача 1.** Если  $a = 0$ , то уравнение (3.5) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение. Напомним, как решается краевая задача для обыкновенного линейного дифференциального уравнения (такие задачи рассматривались в курсе обыкновенных дифференциальных уравнений).

**п°1.** На отрезке  $[1, 2]$  оси  $OX$  найти решение краевой задачи

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0, \\ y(1) &= 0, \quad y'(2) = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Δ Для уравнения (3.7) характеристическое уравнение имеет вид  $k^2 + \lambda = 0$ . Рассмотрим три случая в зависимости от значения параметра  $\lambda$ .

1)  $\lambda = -a^2 < 0$ . Тогда  $k = \pm a$  и общее решение уравнения (3.7) имеет вид  $y = c_1 e^{ax} + c_2 e^{-ax}$ . Из граничных условий получаем однородную систему

$$\begin{cases} y(1) = c_1 e^a + c_2 e^{-a} = 0, \\ y'(2) = a(c_1 e^{2a} - c_2 e^{-2a}) = 0, \end{cases}$$

с определителем  $-2cha \neq 0$ . В этом случае имеем единственное нулевое решение.

2)  $\lambda = 0$ . Тогда общее решение уравнения (3.7) имеет вид  $y = c_1 + c_2 x$ . Граничные условия определяют  $c_1 = 0, c_2 = 0$ , т.е. нулевое решение.

3)  $\lambda = a^2 > 0$ . В этом случае  $k = \pm ia$ , а решение  $y = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax$ . Из граничных условий получаем однородную систему

$$\begin{cases} y(1) = c_1 \cos a + c_2 \sin a = 0, \\ y'(2) = a(-c_1 \sin 2a + c_2 \cos 2a) = 0. \end{cases}$$

Определитель системы  $\cos a \cos 2a + \sin a \sin 2a = \cos a$ , вообще говоря, отличен от нуля. Но если  $\cos a = 0$ , т.е.  $a = \frac{\pi}{2} + \pi n, n = 0, 1, 2, \dots$ , то из первого уравнения системы получаем, что  $c_2 = 0$  и, следовательно,  $y_n(x) = a_n \cos\left(\frac{p}{2} + pn\right)x$ .

Используя принцип суперпозиции, выписываем общее решение:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{p}{2} + pn\right)x. \quad \blacktriangle$$

**Задача 2.** Рассматривается уравнение колебаний струны без воздействия внешней силы

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3.8)$$

и начальные условия

$$u(x,0) = f(x), \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi(x), \quad x \in \mathbf{R}. \quad (3.10)$$

Уравнение (3.8) описывает свободные колебания бесконечной однородной струны. Условия (3.9) и (3.10) задают соответственно *начальное положение* и *начальную скорость* точек струны.

Решение  $u = u(x, t)$  задачи (3.8) – (3.10) находится по *формуле Д'Аламбера*:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x + at) + f(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} j(t) dt.$$

**п°2.** Дано:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x,0) = x, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sin x.$$

Найти  $u(x, t)$ .

Δ Замечаем, что в нашем случае  $f(x) = x, j(x) = \sin x$ . Тогда

$$f(x + at) = x + at, f(x - at) = x - at, \frac{f(x + at) + f(x - at)}{2} = \frac{x + at + x - at}{2} = x,$$

$$\int_{x-at}^{x+at} \varphi(\tau) d\tau = \int_{x-at}^{x+at} \sin \tau d\tau = -\cos \tau \Big|_{\tau=x-at}^{\tau=x+at} = \cos(x - at) - \cos(x + at) = 2 \sin x \sin at.$$

Ответ записываем по формуле Д'Аламбера:  $u(x, t) = x + \frac{\sin x \sin at}{a}$ . ▲

**Задача 3.** Уравнение свободных колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.11)$$

теперь будем рассматривать для случая, когда струна в спокойном состоянии занимает отрезок  $[0, l]$  оси  $Ox$ .

Для однозначного решения данной задачи кроме начальных условий

$$u(x,0) = f(x), \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0, l] \quad (3.13)$$

нужно задать еще краевые условия:

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad (3.14)$$

означающие, что концы струны закреплены. Эта задача называется *краевой задачей Коши*.

Δ Фурье предложил искать решения задачи (3.11) – (3.14) в виде ряда:

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X(x)T''(t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t)$$

и уравнение (3.11) переписывается в виде

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t)$$

или, разделяя переменные

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

В последнем равенстве слева стоит функция от  $t$ , справа – функция от  $x$ . Так как  $t$  и  $x$  – независимые переменные, то равенство возможно лишь в том случае, когда левая и правая части являются вещественными числами:

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -I, \quad I = \text{const} \in \mathbf{R}.$$

В результате для нахождения функций  $X(x)$  и  $T(t)$  получаем систему дифференциальных уравнений:

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0, \quad (3.15)$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \quad (3.16)$$

Рассмотрим вначале уравнение (3.16). В силу нулевых краевых условий (3.14) имеем:

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0, \quad (3.17)$$

$$u(l, t) = X(l)T(t) = 0 \Rightarrow X(l) = 0. \quad (3.18)$$

Анализ (3.16), (3.17) и (3.18) приводит к выводу, что

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad \lambda_n = \left( \frac{\pi n}{l} \right)^2.$$

Тогда (3.15) имеет решение

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{a\pi n}{l} t + B_n \sin \frac{a\pi n}{l} t.$$

Итак, мы нашли подходящие частные решения

$$u_n(x, t) = \left( A_n \cos \frac{a\pi n}{l} t + B_n \sin \frac{a\pi n}{l} t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x.$$

Скомбинируем из них общее решение в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{a\pi n}{l} t + B_n \sin \frac{a\pi n}{l} t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (3.19)$$

Для нахождения чисел  $A_n$  и  $B_n$  почленно продифференцируем ряд (3.19) по переменной  $t$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( -A_n \frac{a\pi n}{l} \sin \frac{a\pi n}{l} t + B_n \frac{a\pi n}{l} \cos \frac{a\pi n}{l} t \right) \sin \frac{\pi n}{l} x. \quad (3.20)$$

Подставим в (3.19) и (3.20)  $t=0$ . Тогда с учетом начальных условий (3.12) и (3.13) будем иметь:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n}{l} x = f(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a\pi n}{l} B_n \sin \frac{\pi n}{l} x = \varphi(x).$$

Мы получили разложение функций  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  в ряды Фурье по синусам. Поэтому неизвестные коэффициенты определяются по стандартным формулам:

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx, \quad (3.21)$$

$$B_n = \frac{2}{a\pi} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx. \quad (3.22)$$

Итак, решение задачи имеет вид (3.19), где коэффициенты определяются по формулам (3.21) и (3.22). ▲

**п°3.** Решить уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

при условиях:  $u(x,0) = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \frac{1}{8} \sin \frac{3\pi x}{l}$ ,  $u(0,t) = u(l,t) = 0$ .

Δ Замечаем, что в нашей задаче  $f(x) \equiv 0$ ,  $\varphi(x) = \frac{1}{8} \sin \frac{3\pi}{l} x$ . Поэтому

$$A_n = 0, \quad B_n = \frac{2}{a\pi} \int_0^l \frac{1}{8} \sin \frac{3\pi}{l} x \sin \frac{\pi n}{l} x dx = \begin{cases} \frac{l}{4a\pi}, & \text{если } n=3 \\ 0, & \text{если } n \neq 3 \end{cases},$$

т.е.

$$A_n = 0, \quad B_3 = \frac{l}{12a\pi}, \quad B_1 = B_2 = B_4 = \dots = B_n = \dots = 0.$$

По формуле (3.19) выписываем ответ:

$$u(x,t) = \frac{l}{12a\pi} \sin \frac{3\pi}{l} x \sin \frac{3a\pi}{l} t. \quad \blacktriangle$$

**Задача 4.** Рассмотрим теперь вынужденные колебания однородной струны с закрепленными концами.

Дано:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x,t); \quad (3.23)$$

начальные условия:

$$u(x,0) = f(x); \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \varphi(x); \quad (3.25)$$

краевые условия:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad (3.26)$$

Δ Приступая к решению данной задачи, вновь воспользуемся идеей Фурье. Решение будем искать в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (3.27)$$

с неизвестными коэффициентами  $T_n(t)$ .

Функция  $u(x,t)$ , определяемая соотношением (3.27), уже удовлетворяет краевым условиям (3.26). Осталось подчинить (3.27) условиям (3.23), (3.24), (3.25).

Силовую функцию  $g(x,t)$  также представим рядом Фурье

$$g(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \quad (3.28)$$

где

$$g_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l g(x,t) \sin \frac{\pi n}{l} x dx. \quad (3.29)$$

С учетом (3.27) и (3.28) уравнение (3.23) перепишется

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t) \sin \frac{\pi n}{l} x \equiv a^2 \sum_{n=1}^{\infty} -\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( T_n''(t) + \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 T_n(t) - g_n(t) \right) \sin \frac{\pi n}{l} x \equiv 0.$$

Это тождество будет выполняться тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$T_n''(t) + \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 T_n(t) \equiv g_n(t). \quad (3.30)$$

Уравнение (3.30) при фиксированном  $n \in N$  решаем стандартно. Вначале решаем соответствующее (3.30) однородное уравнение

$$T_n''(t) + \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 T_n(t) = 0.$$

Характеристическое уравнение

$$k^2 + \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 = 0$$



имеет комплексные корни  $k_{1,2} = \pm i \frac{a\pi n}{l}$ . Поэтому общее решение однородного уравнения:

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{a\pi n}{l} t + B_n \sin \frac{a\pi n}{l} t,$$

где  $A_n$  и  $B_n$  – произвольные постоянные.

Общее решение неоднородного уравнения (3.30) ищем по методу Лагранжа, варьируя произвольные постоянные в общем решении однородного уравнения:

$$T_n(t) = A_n(t) \cos \frac{a\pi n}{l} t + B_n(t) \sin \frac{a\pi n}{l} t. \quad (3.31)$$

Для отыскания  $A_n(t)$  и  $B_n(t)$  выписываем систему Лагранжа:

$$\begin{cases} A_n'(t) \cos \frac{a\pi n}{l} t + B_n'(t) \sin \frac{a\pi n}{l} t = 0, \\ -\frac{a\pi n}{l} A_n'(t) \sin \frac{a\pi n}{l} t + B_n'(t) \frac{a\pi n}{l} \cos \frac{a\pi n}{l} t = g_n(t). \end{cases}$$

Решаем ее по правилу Крамера:

$$A_n'(t) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin \frac{a\pi n}{l} t \\ g_n(t) & \frac{a\pi n}{l} \cos \frac{a\pi n}{l} t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \frac{a\pi n}{l} t & \sin \frac{a\pi n}{l} t \\ -\frac{a\pi n}{l} \sin \frac{a\pi n}{l} t & \frac{a\pi n}{l} \cos \frac{a\pi n}{l} t \end{vmatrix}} = -\frac{l}{a\pi n} g_n(t) \sin \frac{a\pi n}{l} t,$$

$$B_n'(t) = \frac{\begin{vmatrix} \cos \frac{a\pi n}{l} t & 0 \\ -\frac{a\pi n}{l} \sin \frac{a\pi n}{l} t & g_n(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \frac{a\pi n}{l} t & \sin \frac{a\pi n}{l} t \\ -\frac{a\pi n}{l} \sin \frac{a\pi n}{l} t & \frac{a\pi n}{l} \cos \frac{a\pi n}{l} t \end{vmatrix}} = \frac{l}{a\pi n} g_n(t) \cos \frac{a\pi n}{l} t.$$

Интегрируем эти дифференциальные уравнения:

$$A_n(t) = A_n - \frac{l}{a\pi n} \int_0^t g_n(\tau) \sin \frac{a\pi n}{l} \tau d\tau,$$

$$B_n(t) = B_n + \frac{l}{a\pi n} \int_0^t g_n(\tau) \cos \frac{a\pi n}{l} \tau d\tau.$$

Величины  $A_n$  и  $B_n$  в правых частях полученных соотношений являются произвольными числами.

Подставляя найденные функции в формулу (3.31), получим

$$\begin{aligned} T_n(t) &= A_n \cos \frac{a\pi n}{l} t + B_n \sin \frac{a\pi n}{l} t + \\ &+ \frac{l}{a\pi n} \int_0^t g_n(\tau) \left[ \cos \frac{a\pi n}{l} \tau \sin \frac{a\pi n}{l} t - \sin \frac{a\pi n}{l} \tau \cos \frac{a\pi n}{l} t \right] d\tau \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow T_n(t) &= A_n \cos \frac{a\pi n}{l} t + B_n \sin \frac{a\pi n}{l} t + \frac{l}{a\pi n} \int_0^t g_n(\tau) \sin \frac{a\pi n}{l} (t - \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Введем эти  $T_n(t)$  в формулу (3.27):

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{l} x \left[ A_n \cos \frac{a\pi n}{l} t + B_n \sin \frac{a\pi n}{l} t + \frac{l}{a\pi n} \int_0^t g_n(\tau) \sin \frac{a\pi n}{l} (t - \tau) d\tau \right] \quad (3.32)$$

Полагая, что ряд в (3.32) можно почленно дифференцировать по  $t$ , найдем

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{l} x \left[ -A_n \frac{a\pi n}{l} \sin \frac{a\pi n}{l} t + B_n \frac{a\pi n}{l} \cos \frac{a\pi n}{l} t \right]. \quad (3.33)$$

При  $t=0$  формулы (3.27) и (3.33) с учетом начальных условий (3.24) и (3.25) дают:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n}{l} x \stackrel{(3.23)}{=} f(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{a\pi n}{l} \sin \frac{\pi n}{l} x \stackrel{(3.24)}{=} \varphi(x).$$

Замечаем, что здесь мы имеем разложение функций  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  в ряды Фурье, поэтому коэффициенты определяются так:

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx, \quad (3.34)$$

$$B_n = \frac{2}{a\pi n} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx. \quad (3.35)$$

Итак, ответ есть (3.32) с учетом (3.29), (3.34) и (3.35). ▲

**п°4.** Дано уравнение колебаний однородной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-t} \sin \frac{\pi}{l} x;$$

начальные условия:

$$u(x,0) = \sin \frac{2\pi}{l} x, \quad x \in [0, l];$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0;$$

краевые условия:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Найти  $u(x,t)$  – закон движения точек струны со временем  $t$ .

Δ Замечаем, что в нашей задаче  $g(x,t) = e^{-t} \sin \frac{\pi}{l} x$ ,  $f(x) = \sin \frac{2\pi}{l} x$ ,  $\varphi(x) = 0$

для  $x \in [0, l]$ ,  $t \geq 0$ .

1 шаг: находим по формуле (3.29):

$$g_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l e^{-t} \sin \frac{\pi}{l} x \sin \frac{\pi n}{l} x dx = \begin{cases} e^{-t}, & n=1, \\ 0, & n>1. \end{cases}$$

2 шаг: находим по формуле (3.34):

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \sin \frac{2\pi}{l} x \sin \frac{\pi n}{l} x dx = \begin{cases} 1, & n=2, \\ 0, & n=1,3,4,\dots \end{cases}$$

3 шаг: находим по формуле (3.35), что

$$B_n = 0.$$

4 шаг: ориентируясь на формулу (3.32), выписываем ответ:

$$u(x,t) = \cos \frac{2a\pi}{l} t \sin \frac{2\pi}{l} x + \frac{l}{a\pi} \int_0^t e^{-\tau} \sin \frac{a\pi}{l} (t-\tau) d\tau$$

или, интегрируя по частям, окончательно получаем

$$u(x,t) = \cos \frac{2ap}{l} t \sin \frac{2p}{l} x + \frac{l^2 e^{-t} \left( -\cos \frac{ap}{l} t + \frac{l^3}{ap} \sin \frac{ap}{l} t \right)}{(ap)^2 + l^2} \sin \frac{p}{l} x.$$

**Задача 5.** Рассмотрим теперь задачу колебания однородной струны в самой общей постановке. ▲

Дано:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x,t); \quad (3.36)$$

начальные условия:

$$u(x,0) = f(x); \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \varphi(x); \quad (3.38)$$

краевые условия:

$$u(0,t) = \mu_1(t); \quad (3.39)$$

$$u(l,t) = \mu_2(t), \quad (3.40)$$

$$x \in [0, l], t \geq 0.$$

Предполагается, что  $g(x,t)$ ,  $f(x)$ ,  $\varphi(x)$  непрерывные функции, а  $\mu_1(t)$ ,  $\mu_2(t)$  – дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Найти функцию  $u(x,t)$ , удовлетворяющую условиям (3.36) – (3.40).

Δ Идея решения этой задачи состоит в том, чтобы, вводя вспомогательную функцию  $v(x,t)$ , свести данную задачу к предыдущей.

Пусть решение имеет вид

$$u(x,t) = v(x,t) + \mu_1(t) + \frac{x}{l}(\mu_2(t) - \mu_1(t)). \quad (3.41)$$

Обратим внимание на то, что у функции  $v(x,t)$  будут нулевые краевые условия:

$$u(0,t) = v(0,t) + \mu_1(t) = \mu_1(t) \Rightarrow v(0,t) = 0,$$

$$u(l,t) = v(l,t) + \mu_2(t) = \mu_2(t) \Rightarrow v(l,t) = 0.$$

Выясним, какому дифференциальному уравнению удовлетворяет функция  $v(x,t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= \frac{\partial v}{\partial t}(x,t) + \mu_1'(t) + \frac{x}{l}(\mu_2'(t) - \mu_1'(t)), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) &= \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t) + \mu_1''(t) + \frac{x}{l}(\mu_2''(t) - \mu_1''(t)), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

Подставляя в уравнение (3.36) выражения для  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  и  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ , получим:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + g(x,t) - \mu_1''(t) - \frac{x}{l}(\mu_2''(t) - \mu_1''(t)). \quad (3.42)$$

Итак, силовая функция  $g_1(x,t)$  в уравнении (3.42) имеет вид:

$$g_1(x,t) = g(x,t) - \mu_1''(t) - \frac{x}{l}(\mu_2''(t) - \mu_1''(t)).$$

Выведем теперь начальные условия для функции  $v(x,t)$ . Полагая  $t = 0$  в формулах (3.41) и (3.42), получаем

$$u(x,0) = v(x,0) + \mu_1(0) + \frac{x}{l}(\mu_2(0) - \mu_1(0)) = f(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) + \mu_1'(0) + \frac{x}{l}(\mu_2'(0) - \mu_1'(0)) = \varphi(x).$$

Следовательно,

$$v(x,0) = f(x) - \mu_1(0) - \frac{x}{l}(\mu_2(0) - \mu_1(0)) = f_1(x),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = \varphi(x) - \mu_1'(0) - \frac{x}{l}(\mu_2'(0) - \mu_1'(0)) = \varphi_1(x).$$

Итак, для функции  $v(x,t)$  мы можем воспользоваться решением предыдущей задачи:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{l} x \left[ A_n \cos \frac{a\pi n}{l} t + B_n \sin \frac{a\pi n}{l} t + \frac{l}{a\pi} \int_0^t g_{1n}(\tau) \sin \frac{a\pi n}{l} (t-\tau) d\tau \right], \quad (3.43)$$

где

$$g_{1n}(t) = \frac{2}{l} \int_0^l g_1(x,t) \sin \frac{\pi n}{l} x dx. \quad (3.44)$$

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l f_1(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx, \quad (3.45)$$

$$B_n = \frac{2}{a\pi} \int_0^l \varphi_1(x) \sin \frac{\pi n}{l} x dx. \quad (3.46)$$

Найдя  $v(x,t)$ , получим решение исходной задачи по формуле (3.41). ▲

**п°5.** Дано:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$$

начальные условия:

$$u(x,0) = \frac{x}{l}; \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0;$$

краевые условия:

$$u(0,t) = 0; \quad u(l,t) = e^{-t}.$$

Δ Находясь в условиях задачи 4, выпишем данные:

$$g(x,t) = 0, f(x) = \frac{x}{l}, \varphi(x) = 0, \mu_1(t) \equiv 0, \mu_2(t) \equiv e^{-t}.$$

Поэтому решение записываем по формуле (3.41):

$$u(x,t) = v(x,t) + \frac{x}{l} e^{-t}.$$

Для функции  $v(x,t)$  выпишем необходимые исходные данные:

$$g_1(x, t) = -\frac{x}{l} e^{-t},$$

$$f_1(x) = f(x) - \frac{x}{l} e^{-t} \Big|_{t=0} = 0;$$

$$\varphi_1(x) = \varphi(x) + \frac{x}{l} e^{-t} \Big|_{t=0} = \frac{x}{l}.$$

Найдем по формулам (3.44), (3.45), (3.46):

$$g_{1n}(t) = \frac{2}{l} \int_0^l -\frac{x}{l} e^{-t} \sin \frac{pn}{l} x dx = -\frac{2}{l^2} e^{-t} \int_0^l x \sin \frac{pn}{l} x dx =$$

$$= \left[ \begin{array}{l} u = x; \quad du = dx \\ dv = \sin \frac{pn}{l} x dx; \quad v = -\frac{l}{np} \cos \frac{pn}{l} x \end{array} \right] = -\frac{2}{l^2} e^{-t} \left[ -\frac{xl}{np} \cos \frac{pn}{l} x \Big|_0^l + \frac{l}{np} \int_0^l \cos \frac{pn}{l} x dx \right] =$$

$$= \frac{2}{pn} e^{-t} (-1)^n;$$

$$A_n = 0;$$

$$B_n = \frac{2}{an\pi} \int_0^l \frac{x}{l} \sin \frac{\pi n}{l} x dx = \frac{2}{an\pi l} \left[ -\frac{l^2}{n\pi} (-1)^n \right] = \frac{2l}{a(n\pi)^2} (-1)^{n+1}.$$

Тогда  $v(x, t)$  восстанавливаем по формуле (3.43):

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{l} x \left[ \frac{2l}{a(n\pi)^2} (-1)^{n+1} \sin \frac{a\pi n}{l} t + \frac{l}{an\pi} \int_0^t \frac{2}{n\pi} e^{-\tau} (-1)^n \sin \frac{a\pi n}{l} (t - \tau) d\tau \right].$$

А далее воспользуемся табличной формулой:

$$\int_0^t e^{-at} \sin b(t-t) dt = \frac{be^{at} - b \cos bt - a \sin bt}{a^2 + b^2}.$$

Тогда

$$\int_0^t e^{-t} \sin \frac{anp}{l} (t-t) dt = \frac{\frac{anp}{l} e^{-t} - \frac{anp}{l} \cos \frac{anp}{l} t + \sin \frac{anp}{l} t}{\left(\frac{anp}{l}\right)^2 + 1},$$

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2l(-1)^n}{a(n\pi)^2} \sin \frac{pn}{l} x \left[ -\sin \frac{apn}{l} t + \frac{l \sin \left( e^{-t} - \cos \frac{anp}{l} t \right) + l^2 \sin \frac{anp}{l} t}{(anp)^2 + l^2} \right].$$

По формуле (3.41) восстанавливаем решение:

$$u(x,t) = \frac{x}{l} e^{-t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2l}{a(np)^2} (-1)^n \sin \frac{pn}{l} x \left[ \frac{lanp \left( e^{-t} - \cos \frac{anp}{l} t \right) + l^2 \sin \frac{anp}{l} t}{(anp)^2 + l^2} - \sin \frac{apn}{l} t \right].$$

### Задачи для самостоятельного решения

**Задача 1.** Пусть на пространстве  $C[a, b]$  определен функционал

$$d_{x_0} = f(x_0), f(x) \in C[a, b],$$

называемый  $\delta$ -функцией. Показать, что этот функционал линейный и найти его норму.

**Отв.:**  $\|f_{x_0}\| = 1$ .

**Задача 2.** Пусть  $j_0(x) \in C[a, b]$  – фиксированная функция. Для любой

$f(x) \in C[a, b]$  определим функционал формулой  $F(f(x)) = \int_a^b f(x) j_0(x) dx$ . По-

казать, что этот функционал линейный и найти его норму.

**Отв.:**  $\|F\| = \int_a^b |j_0(x)| dx = 1$ .

**Задача 3.** В указанной области при всех значениях параметра  $\lambda$  найти отличные от тождественного нуля решения  $y = y(x)$  краевой задачи:

$$y'' + \lambda y = 0, y(1) = 0, y'(2) = 0, 1 \leq x \leq 2;$$

**Задача 4.** Методом Д'Аламбера найти уравнение  $u = u(x, t)$  формы однород-

ной бесконечной струны, определяемой уравнением  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ , если в на-

чальный момент  $t = 0$  форма струны и скорость точки струны с абсциссой  $x$  определяются заданными функциями:  $u(x, 0) = x(2 - x), \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = e^{-x}$ ;

**Задача 5.** Найти решение  $u = u(x, t)$  уравнения  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 \leq x \leq L, t > 0$ ,

удовлетворяющего граничным условиям  $u(0, t) = 0, u(L, t) = 0, t > 0$ , и началь-

ным условиям  $u(x, 0) = f(x), \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = g(x)$ .

**Отв.:**  $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{np x}{L} \left( a_n \cos \frac{np x}{L} + b_n \sin \frac{np x}{L} \right)$ ,  $a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{np x}{L} dx$ ,  
 $b_n = \frac{2}{npL} \int_0^L g(x) \sin \frac{np x}{L} dx$ .

**Задача 6.** Найти уравнение  $u = u(x,t)$  колебаний струны, описываемых уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

если концы закреплены в положении  $u(0,t) = 0, u(l,t) = 0$ , а начальное положение струны и начальная скорость точки  $x$  задаются условиями

$$u(x,0) = a \sin \frac{px}{l}, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0.$$

**Отв.:**  $u(x,t) = a \sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi x}{l}$ ;

**Задача 7.** Дано:  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{x}{l} e^{-t}$ ; начальные условия:  $u(x,0) = \frac{x}{l}$ ;  
 $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$ ; краевые условия:  $u(0,t) = 0$ ;  $u(l,t) = e^{-t}$ .

**Отв.:**  $u(x,t) = \frac{x}{l} e^{-t} + \frac{2l}{ap^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \sin \frac{np}{l} x$ .

**Задача 8.** Туго натянутая струна с закрепленными концами  $x = 0$  и  $x = l$  имеет в начальный момент смещение  $u = u_0 \sin \frac{2px}{l}$  и отпускается из состояния покоя в этом положении. Найти смещение  $u = u(x,t)$  в любой момент  $t$ .

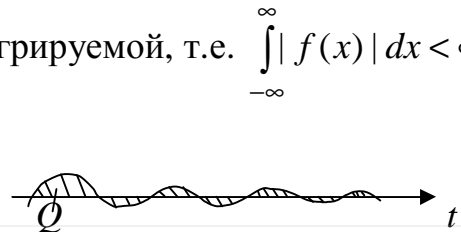
**Отв.:**  $u(x,t) = u_0 \sin \frac{2px}{l} \cos \frac{2pct}{l}$ .

## § 4. Преобразование Фурье и его свойства

### 4.1. Преобразование Фурье

Пусть функция  $f(t)$  является абсолютно интегрируемой, т.е.  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$ .

Геометрически это означает, что площадь  $Q$ , ограниченная осью  $Ox$  и графиком сигнала  $f(t)$ , конечна.





Напомним, что для абсолютно интегрируемых функций существуют *прямое* и *обратное* преобразования Фурье. Прямое преобразование Фурье  $F(\omega)$  функции  $f(t)$  задается формулой

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi\omega t} dt \quad (4.1)$$

и иногда еще называется *спектральной функцией интеграла Фурье*.

Зная функцию  $F(\omega)$ , можно восстановить сигнал  $f(t)$  с помощью обратного преобразования Фурье:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i2\pi\omega t} d\omega. \quad (4.2)$$

В дальнейшем будем использовать запись  $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ , означающую, что функция  $F(\omega)$  является прямым преобразованием Фурье сигнала  $f(t)$ .

Легко заметить, что операторы (4.1) и (4.2) *линейны*:  
если

$$\begin{aligned} f_1(t) &\leftrightarrow F_1(\omega), \\ f_2(t) &\leftrightarrow F_2(\omega), \end{aligned}$$

то

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \leftrightarrow c_1 F_1(\omega) + c_2 F_2(\omega),$$

где  $c_1, c_2$  – произвольные числа.

**Задача 1.** Дано:

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega).$$

Найти спектральную функцию сигнала  $F(t)$ .

Δ По определению спектральной функции для сигнала  $F(t)$  имеем:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-i2\pi\omega t} dt &= \left| \begin{array}{l} \text{введем замену} \\ \omega = -\omega_1 \end{array} \right| = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{i2\pi\omega_1 t} dt \stackrel{(4.2)}{=} f(\omega_1) = f(-\omega). \end{aligned}$$

Итак, мы вывели очень важное *свойство дуальности* соответствия:  
если

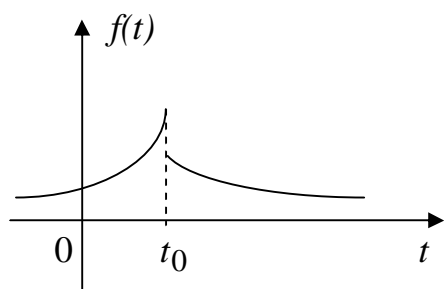
$$f(t) \leftrightarrow F(\omega),$$

то

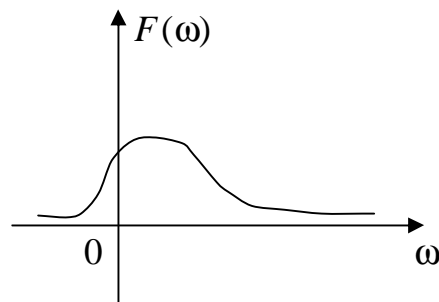
$$F(t) \leftrightarrow f(-\omega).$$

Рассмотрим геометрический смысл этого свойства:

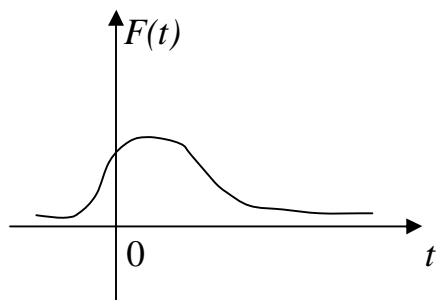
если



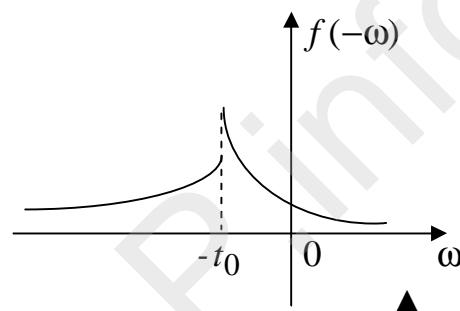
↔



то



↔

**Задача 2.** Доказать:а) если  $f(-t) \equiv f(t)$ , то  $F(-\omega) = F(\omega)$ ;б) если  $f(-t) \equiv -f(t)$ , то  $F(-\omega) = -F(\omega)$ .

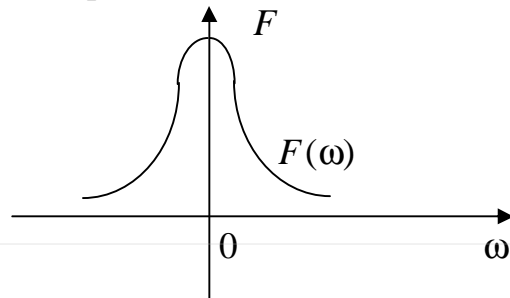
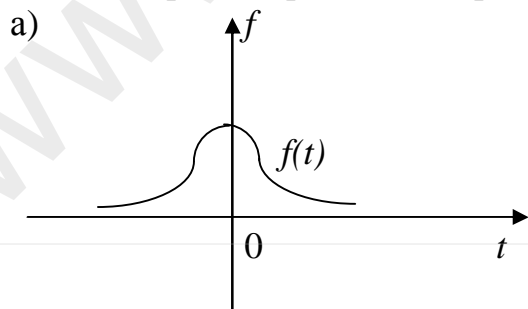
Δ Из (4.1) с учетом формулы Эйлера следует, что

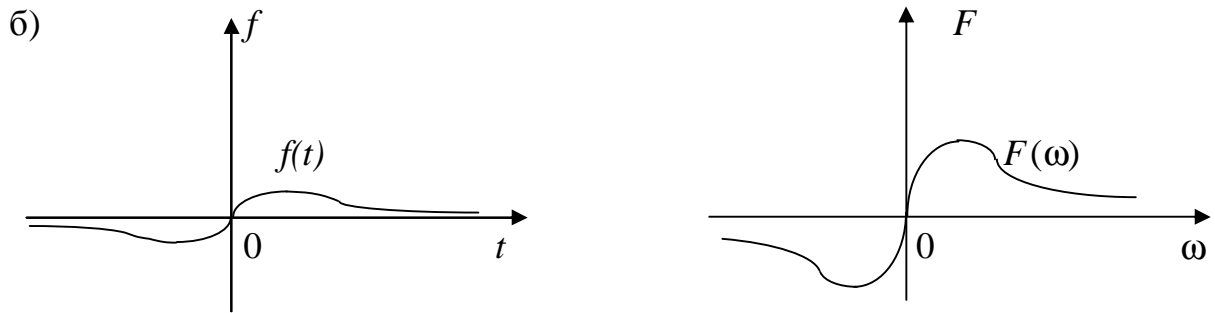
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos 2\pi\omega t dt - i \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin 2\pi\omega t dt = a(\omega) - ib(\omega).$$

Заметим, что  $F(-\omega) = a(\omega) + ib(\omega)$ .а) Пусть  $f(t)$  – четная функция. Тогда  $a(\omega) = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos 2\pi\omega t dt$  как интегралот четной функции по симметричному интервалу интегрирования и  $b(\omega) = 0$  как интеграл от нечетной функции по симметричному интервалу. Следовательно,  $F(-\omega) = F(\omega)$ .

Утверждение пункта б) доказывается аналогично. ▲

Если говорить образно, то справедливы такие картины соответствия:





**Задача 3.** Доказать справедливость утверждения:  
если

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega),$$

то

$$f'(t) \leftrightarrow i2\pi\omega F(\omega).$$

$$\Delta f'(t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-i2\pi\omega t} dt = \left. \begin{array}{l} \text{интегрируем по частям:} \\ u = e^{-i2\pi\omega t}; \quad dv = f'(t)dt; \\ du = -i2\pi\omega e^{-i2\pi\omega t} dt; \quad v = f(t) \end{array} \right| = f(t)e^{-i2\pi\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} +$$

$$+ i2\pi\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi\omega t} dt = \left. \begin{array}{l} \text{первое слагаемое суммы равно нулю,} \\ \text{так как } f(-\infty) = f(\infty) = 0 \text{ из-за} \\ \text{условия } \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = Q < +\infty, \text{ а второе} \\ \text{слагаемое преобразуем по формуле (4.1)} \end{array} \right| = i2\pi\omega F(\omega).$$

Так как операция интегрирования обратна операции дифференцирования, то легко доказать, что справедливо соответствие

$$\int_0^t f(t) dt \leftrightarrow \frac{F(\omega)}{i2\pi\omega}.$$

**Задача 4.** Доказать, что

$$f(t - \tau) \leftrightarrow e^{-i2\pi\omega\tau} F(\omega), \quad \tau - \text{число.}$$

$$\Delta f(t - \tau) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)e^{-i2\pi\omega t} dt = \left. \begin{array}{l} \text{введем замену} \\ u = t - \tau \\ t = u + \tau \\ dt = du \end{array} \right| = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i2\pi\omega(u+\tau)} du =$$

$$= e^{-i2\pi\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i2\pi\omega u} du = e^{-i2\pi\omega\tau} F(\omega). \quad \blacktriangle$$

Заметим, что  $|e^{-i2\pi\omega\tau}| = 1$ . Поэтому операция запаздывания временного аргумента никак не отразится на модуле спектральной функции  $F(\omega)$ .

**Задача 5.** Обосновать формулу Рэлея

$$(u(t), v(t)) = (U(\omega), V(\omega)) \quad (4.3)$$

– скалярное произведение сигналов  $u(t)$  и  $v(t)$  равно скалярному произведению их спектральных характеристик  $U(\omega)$  и  $V(\omega)$ .

Δ Пусть  $u(t)$  и  $v(t)$  – комплексные сигналы, а  $U(\omega)$  и  $V(\omega)$  – соответственно их спектральные характеристики:

$$u(t) \leftrightarrow U(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-i2\pi\omega t} dt,$$

$$v(t) \leftrightarrow V(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-i2\pi\omega t} dt.$$

Зная  $V(\omega)$ , можно восстановить  $v(t)$ :

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega) e^{i2\pi\omega t} d\omega.$$

Тогда для  $v^*(t)$  – комплексно сопряженной к  $v(t)$  функции – получаем

$$v^*(t) = \int_{-\infty}^{\infty} V^*(\omega) e^{i2\pi\omega t} d\omega.$$

Скалярное произведение функций  $u(t)$  и  $v(t)$  вычисляется так:

$$\begin{aligned} (u, v) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t) v^*(t) dt = \left| \begin{array}{l} \text{используя представление} \\ v^*(t) \text{ по предыдущей формуле} \end{array} \right| = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} V^*(\omega) e^{-i2\pi\omega t} d\omega = \left| \begin{array}{l} \text{поменяем в двойном интеграле} \\ \text{порядок интегрирования} \end{array} \right| = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} V^*(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-i2\pi\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} V^*(\omega) U(\omega) d\omega = (U, V). \end{aligned}$$

Если формулу Рэлея (4.3) рассмотреть для случая  $v(t) = u(t)$ , то получим

$$(u, u) = (U, U) \Leftrightarrow$$

$$\|u(t)\|^2 = \|U(\omega)\|^2. \quad (4.4)$$

Формула (4.4) называется *формулой Парсеваля-Планишеренеля*. Она говорит о том, что нормы временной  $u(t)$  и спектральной характеристик  $U(\omega)$  сигнала совпадают. Другими словами, если  $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ , то

$$\|f(t)\| = \|F(\omega)\|,$$

$$\|f(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) F^*(\omega) d\omega = \|F(\omega)\|^2.$$

Здесь мы полагали функцию  $f(t)$  – временную характеристику сигнала – вещественной.

Запишем в таблицу 1 сводку формул, теорем и правил соответствия временных  $f(t)$  и спектральных характеристик  $F(\omega)$ .

**Таблица 1. Свойства преобразования Фурье**

$f(t)$	$F(\omega)$
$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i2\pi\omega t} d\omega$	$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi\omega t} dt$
Если $f^*(t) = f(t)$ ,	то $F(\omega) = F^*(-\omega) \Leftrightarrow  F(\omega)  =  F(-\omega) $
Четная симметрия: $f(-t) \equiv f(t)$	$F(-\omega) = F(\omega)$
Нечетная симметрия: $f(-t) \equiv -f(t)$	$F(-\omega) = -F(\omega)$
Линейность: $c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$	$c_1 F_1(\omega) + c_2 F_2(\omega)$
Дуальность: $F(t)$	$f(-\omega)$
Изменение масштаба: $f(kt)$	$\frac{1}{ k } F\left(\frac{\omega}{k}\right)$
Задержка во времени: $f(t - \tau)$	$e^{-i2\pi\omega\tau} F(\omega)$
Умножение на $e^{i2\pi\omega_0 t}$ : $e^{i2\pi\omega_0 t} f(t)$	$F(\omega - \omega_0)$
Свертка: $\int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(t - u) du = f * g$	$F(\omega) G(\omega)$
Произведение: $f(t) g(t)$	$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) G(\omega - u) du$
Дифференцирование: $f'(t)$	$i2\pi\omega F(\omega)$
Интегрирование:	$\frac{F(\omega)}{i2\pi\omega}$

$\int_0^t f(t)dt$	
Формула Рэлея:	
$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g^*(t)dt = (f, g)$	$(F, G) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G^*(\omega)d\omega$
Формула Парсеваля:	
$\int_{-\infty}^{\infty}  f(t) ^2 dt$	$\int_{-\infty}^{\infty}  F(\omega) ^2 dt$

## 4.2. Функция Дирака $\delta(t)$

Физиком Дираком был рассмотрен следующий пример. Материальная точка  $A$  (шарик) до начального момента покоилась.



В момент  $t = 0$  по ней ударили молоточком, после чего она мгновенно перескочила в положение  $B$ , пройдя единичный путь  $AB$ , и опять остановилась.

Рассуждая как физик, Дирак предложил ввести функцию  $\delta(t)$ :

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \neq 0, \\ \infty, & \text{если } t = 0. \end{cases}$$

При этом предполагается, что выполняются условия:

$$\int_0^t \delta(t) dt = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0, \\ 1, & \text{если } t \geq 0. \end{cases}$$

Теперь эту функцию называют *дельта-функцией Дирака*.

Обратимся теперь к удивительным свойствам этой функции:

$$1^\circ. \int_{-\infty}^{\infty} f(t)d(t)dt = \int_{-e}^e f(t)d(t)dt = \left| \begin{array}{l} \text{здесь } e - \text{ сколько угодно} \\ \text{малое число } > 0 \end{array} \right| =$$

$$= f(0) \int_{-e}^e d(t)dt = f(0);$$

$$2^\circ. \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0).$$

Итак, дельта-функция обладает *фильтрующим* свойством: под знаком определенного интеграла она выхватывает значение перемножаемой с ней функции при определенном значении аргумента  $t_0$ .

Есть еще много удивительных свойств у дельта-функции (например, оказывается, что ее можно сколько угодно раз дифференцировать), но мы пока рассматривать их не будем.

Попробуем включить  $\delta(t)$ -функцию в число сигналов и займемся ее спектральным изображением. А попутно мир сигналов пополним еще кое-какими функциями.

### 4.3. Спектральная плотность постоянного сигнала

Напомним, какие ограничения нужно наложить на функцию  $f(t)$  для того, чтобы ее можно было представить интегралом Фурье.

**Теорема 4.1.** Если функция  $f(t)$

1) кусочно-непрерывная на всей числовой оси  $\mathbf{R}$ , имеет конечное число точек разрыва 1-го рода и конечное число точек экстремума на любом отрезке  $[-l, l]$  (условие Дирихле);

2) абсолютно интегрируема на всей числовой оси:  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt = Q < +\infty$ ,

то для нее существует интеграл Фурье

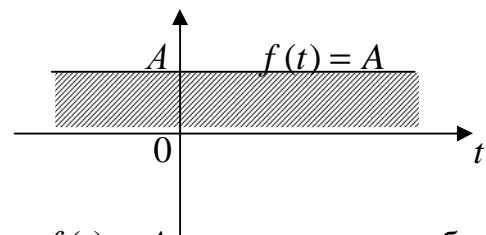
$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i2\pi\omega t} d\omega = \frac{f(t-0) + f(t+0)}{2},$$

который сходится при любом  $t$  к среднему значению левого и правого пределов функции  $f(t)$  в точке  $t$ .

Заметим, что второе условие этой теоремы дает жесткое ограничение на класс функций  $f(t)$ , представимых интегралом Фурье. В дальнейшем мы будем обсуждать, как можно изменить оператор Фурье, чтобы класс функций  $f(t)$  мог быть значительно расширен.

Пусть  $f(t) = A$  – число. Этот сигнал, вообще говоря, запрещен теоремой 4.1,

так как условие 2)  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt = Q < +\infty$



здесь не выполнено. Площадь между графиком  $f(t) = A$  и осью  $t$  здесь бесконечна. Но мы все-таки попробуем применить преобразование (4.1) чисто формально.

Пусть  $\varphi(t)$  – благопристойный сигнал, имеющий спектральную плотность  $\Phi(\omega)$ :

$$\Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-i2\pi\omega t} dt. \quad (4.5)$$

Воспользуемся теперь формулой Рэлея:

$$(f, \varphi) = (F(\omega), \Phi(\omega)) \Leftrightarrow (f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi^*(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\Phi^*(\omega)d\omega = (F, \Phi). \quad (4.6)$$

В нашем случае левая часть формулы (4.6) в силу (4.5) дает

$$A \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^*(t)dt \stackrel{(a)}{=} A\Phi(0),$$

а правая часть есть интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\Phi^*(\omega)d\omega = A\Phi(0).$$

Замечаем, что  $F(\omega)$  проявляет свойство 1° дельта-функции:

$$F(\omega) = A\delta(\omega).$$

Итак,

$$f(t) = A \Leftrightarrow F(\omega) = A\delta(\omega),$$

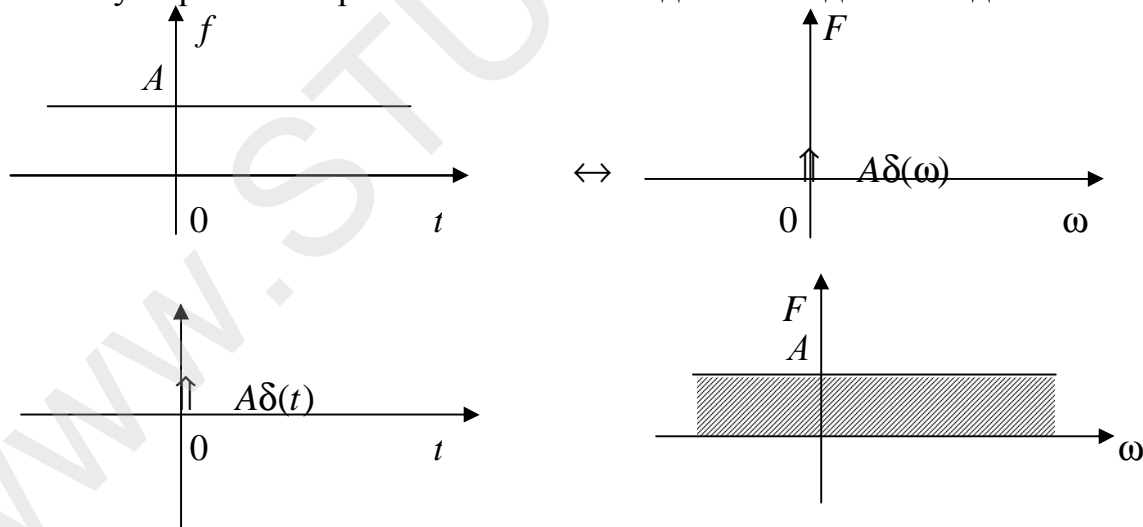
а по принципу двойственности

$$A\delta(t) \Leftrightarrow A.$$

Математики договорились  $\delta(t)$ -функцию обозначать вектором единичной длины, исходящим вертикально из начала координат



Поэтому образно в картинках наши последние выводы выглядят так:



#### 4.4. Спектральная плотность комплексного сигнала

Рассмотрим комплексное колебание

$$u(t) = e^{i2\pi\omega t}$$



с частотой  $\omega_0$  в Герцах. Этот сигнал также не обладает свойством абсолютной интегрируемости на всей числовой прямой. Но оказывается, что для него спектральная плотность существует.

**Задача 6.** Доказать, что если

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega),$$

то

$$e^{i2\pi\omega_0 t} f(t) \leftrightarrow F(\omega - \omega_0).$$

$$\Delta f(t) \leftrightarrow F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi\omega t} dt;$$

$$e^{i2\pi\omega_0 t} f(t) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i2\pi\omega_0 t} \cdot e^{-i2\pi\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi(\omega - \omega_0)t} dt = F(\omega - \omega_0).$$

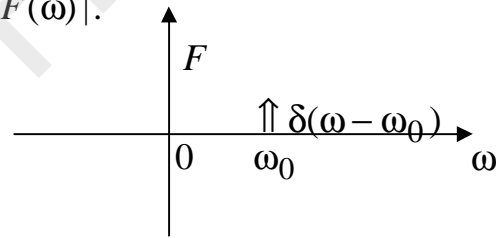
Возьмем теперь  $f(t) = 1$ . Тогда  $f(t) \leftrightarrow d(t)$  и, согласно итогу задачи 6,

$$e^{i2\pi\omega_0 t} \cdot 1 \leftrightarrow \delta(\omega - \omega_0) \leftrightarrow e^{i2\pi\omega_0 t} \leftrightarrow d(\omega - \omega_0).$$

Заметим, что для вещественных сигналов  $f(t)$  модуль спектральной плотности есть четная функция от  $\omega$ :

$$|F(-\omega)| = |F(\omega)|.$$

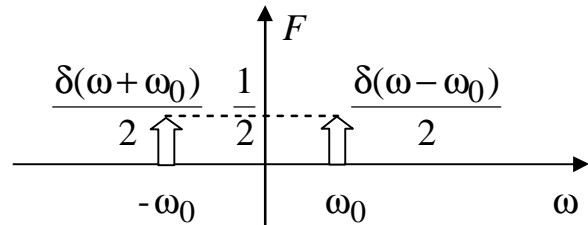
А теперь рассмотрим в качестве сигнала  $e^{i2\pi\omega_0 t}$  – комплексное колебание, для которого спектральная функция  $\delta(\omega - \omega_0)$  имеет несимметрический модуль относительно вертикальной оси.



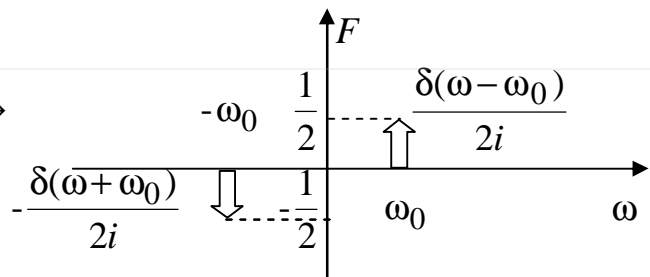
#### 4.5. Спектральная плотность гармонических колебаний

Вычислим спектральные характеристики простейших гармонических колебаний  $\cos 2\pi\omega_0 t, \sin 2\pi\omega_0 t$ . Для этого воспользуемся формулами Эйлера:

$$1) \cos 2\pi\omega_0 t = \frac{e^{i2\pi\omega_0 t} + e^{-i2\pi\omega_0 t}}{2} \leftrightarrow \frac{\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)}{2};$$



$$2) \sin 2\pi\omega_0 t = \frac{e^{i2\pi\omega_0 t} - e^{-i2\pi\omega_0 t}}{2i} \leftrightarrow \frac{\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)}{2i}.$$



#### 4.6. Спектральная плотность произвольного периодического сигнала

Пусть дан периодический сигнал  $f(t) = f(t + 2l)$ . Представим его в виде ряда Фурье в комплексной форме и найдем его спектральную функцию:

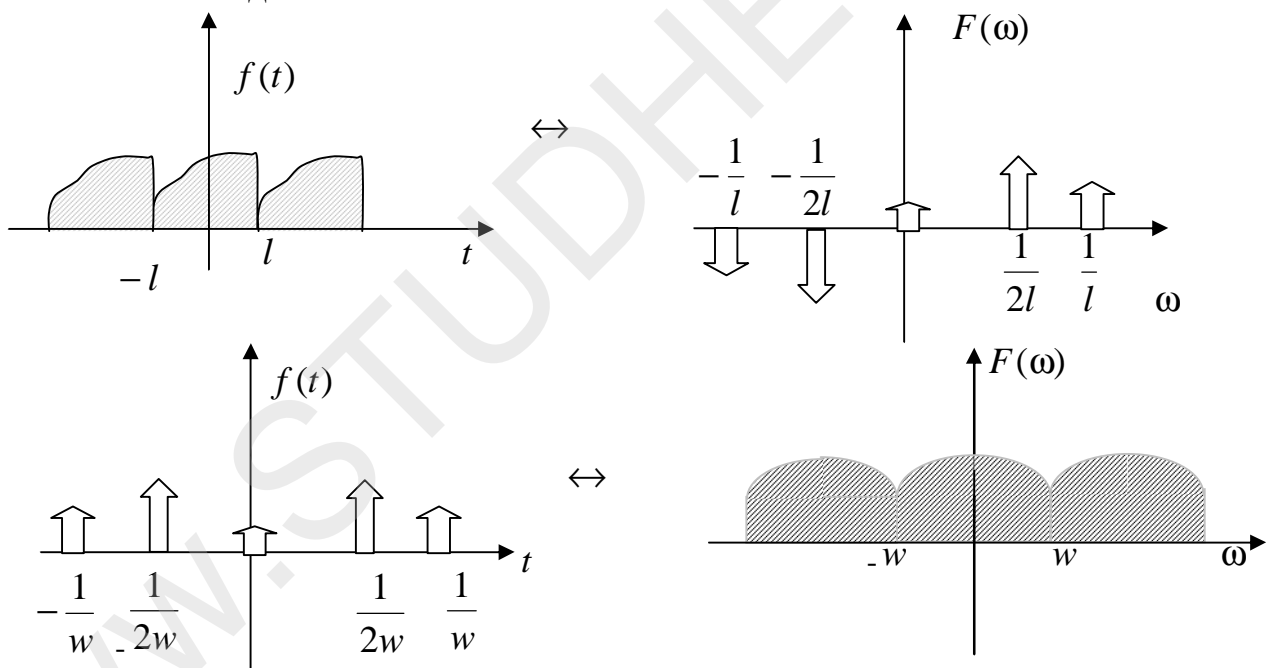
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{pn}{l} t} \leftrightarrow F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n d\left(\omega - \frac{n}{2l}\right),$$

где

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) e^{-i \frac{pn}{l} t} dt, \quad c_n = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n - ib_n}{2}.$$

Функция  $F(\omega)$  называется *импульсной функцией*.

Итак, преобразование Фурье для *периодической* функции времени представляет собой *импульсную* последовательность в частотной области, причем площади импульсов равны коэффициентам  $c_n$  ряда Фурье. В соответствии со свойством дуальности преобразование Фурье импульсной последовательности во временной области будет давать периодическую функцию частоты. Геометрически это выглядит так:



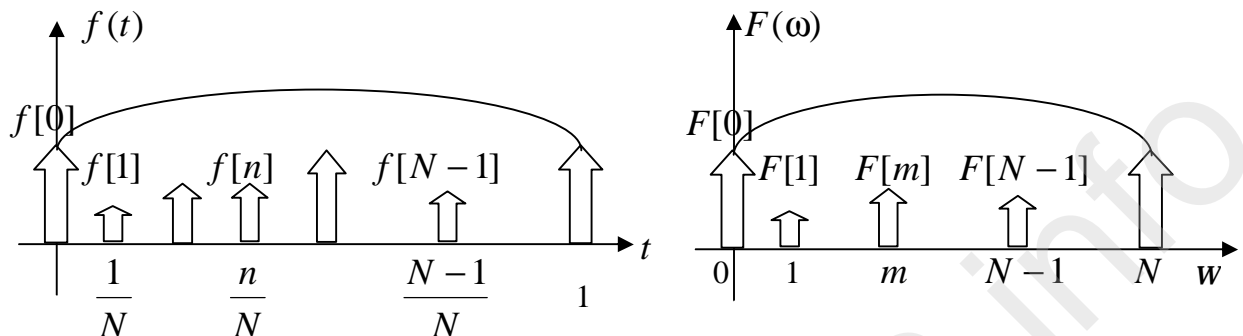
В аналитической форме рассмотренное выше соответствие имеет вид:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] d\left(t - \frac{n}{2w}\right) \leftrightarrow F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] e^{-i \frac{pn}{w} t} d\left(\omega - \frac{n}{2w}\right),$$

$$f[n] = \frac{1}{2w} \int_{-w}^w F(\omega) e^{i \frac{pn}{w} t} d\omega.$$

Тот факт, что преобразование Фурье периодической функции  $f(t)$  времени  $t$ , заданной в виде периодической или импульсной последовательности, соответственно дает импульсную или периодическую последовательности в частотной области, фактически означает, что интегральные операторы прямого и об-

ратного преобразований Фурье превращаются в конечные суммы площадей импульсов. Это позволяет записать формулы анализа и синтеза так, что вместо интегралов будут стоять суммы площадей импульсов. При этом обе указанные суммы конечны в силу их периодичности. Проиллюстрируем сказанное геометрически:



Аналитическая форма упомянутых формул анализа и синтеза имеет вид:

$$f[n] = \sum_{m=0}^{N-1} F[m] e^{i \frac{2\pi mn}{N}}, \quad (4.7)$$

$$F[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-i \frac{2\pi mn}{N}}. \quad (4.8)$$

Если известны площади  $N$  импульсов  $f[0], f[1], \dots, f[n], \dots, f[N-1]$  для временного сигнала  $f(t)$  стандартного периода  $T=1$ , то соответствующие площади  $N$  импульсов  $F[0], F[1], \dots, F[m], \dots, F[N-1]$  для  $F(\omega)$  определяются по формулам (4.8) – это анализ. Если же известны площади  $N$  импульсов  $F[0], \dots, F[m], \dots, F[N-1]$  для спектральной характеристики сигнала, то его временная характеристика восстанавливается по формулам (4.7) – синтез.

Замечание. Хотя при выводе формул (4.7) и (4.8) подчеркивался периодический характер  $f(t)$  и  $F(\omega)$ , результирующие выражения (4.7) и (4.8) уже не зависят от периодичности.

Каждая из систем уравнений (4.7) и (4.8) взаимно обратима. При этом величины  $F[0], F[1], \dots, F[m], \dots, F[N-1]$  называют *дискретным преобразованием Фурье* по заданной совокупности  $f[0], f[1], \dots, f[n], \dots, f[N-1]$ .

После вывода формул (4.7) и (4.8) стали разрабатываться алгоритмы быстрого счета по этим формулам с учетом симметрии и периодичности множителей  $e^{\pm i 2\pi mn / N}$ . Указанные алгоритмы носят название *быстрого преобразования Фурье*. Идею быстрого преобразования Фурье рассмотрим на простом примере.

**п°1.** Пусть  $N=8$  и требуется вычислить систему из восьми чисел  $f[0], f[1], \dots, f[7]$  по заданной системе чисел  $F[0], F[1], \dots, F[7]$ . Согласно формулам (4.7), имеем:

$$f[n] = \sum_{m=0}^7 F[m] e^{i \frac{2\pi mn}{8}}.$$

Изменяя порядок членов и группируя, перепишем

$$f[n] = f_{\text{четное}}[n] + f_{\text{нечетное}}[n] e^{i \frac{2pn}{8}}, 0 \leq n < 8.$$

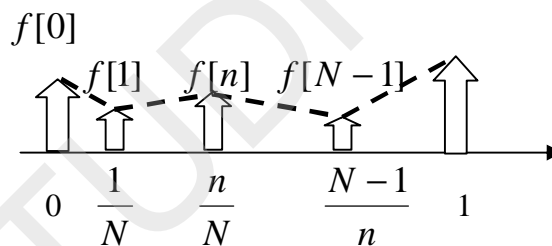
Ясно, что

$$f_{\text{четное}}[n] = F[0] + F[2]e^{i \frac{2pn}{4}} + F[4]e^{i \frac{2p \cdot 2n}{4}} + F[6]e^{i \frac{2p \cdot 3n}{4}}, \quad (4.9)$$

$$f_{\text{нечетное}}[n] = F[1] + F[3]e^{i \frac{2pn}{4}} + F[5]e^{i \frac{2p \cdot 2n}{4}} + F[7]e^{i \frac{2p \cdot 3n}{4}}. \quad (4.10)$$

Отметим, что  $f_{\text{четное}}[n]$  и  $f_{\text{нечетное}}[n]$  находятся одним оператором, только в операторе (4.9) участвуют значения  $F[0], F[2], F[4], F[6]$ , а в операторе (4.10) – значения  $F[1], F[3], F[5], F[7]$ . Вычисление операторов  $f_{\text{четное}}[n]$  и  $f_{\text{нечетное}}[n]$  легко запрограммировать, введя дополнительный параметр  $n$ , принимающий значения  $0, 1, 2, 3, \dots, 7$ .

Формулы (4.7) и (4.8) являются практическим инструментом для цифровой обработки сигналов: если нам дана частотная характеристика сигнала  $F(\omega)$  и  $\omega \in [0, N)$  – главный набор частот, то, вычисляя значения  $F[0], F[1], \dots, F[m], \dots, F[N-1]$  и подставляя их в систему (4.7), находим  $f[0], f[1], \dots, f[n], \dots, f[N-1]$ . Откладывая найденные числа на временном отрезке  $[0, 1]$  и соединяя полученные точки кривой, восстанавливаем картину исходного сигнала:

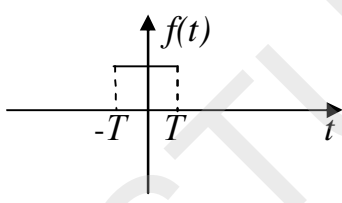
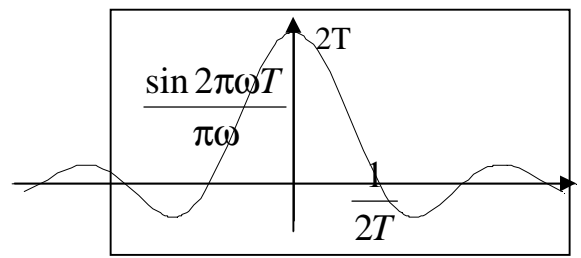
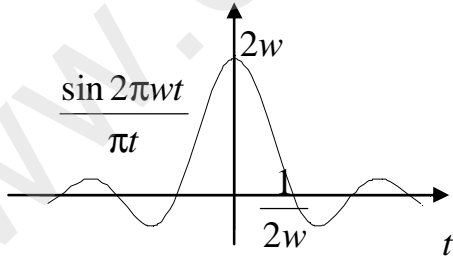
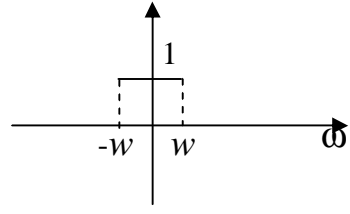


#### 4.7. Краткая таблица преобразований Фурье

Учитывая результаты пунктов 4.1 – 4.7, построим таблицу преобразований Фурье.

**Таблица 2.** Краткая таблица преобразований Фурье

№	$f(t)$	$F(\omega)$
1	$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i2\pi\omega t} d\omega$	$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi\omega t} dt$
2	$\delta(t)$	1
3	1	$\delta(\omega)$
4	$e^{i2\pi\omega_0 t}$	$\delta(\omega - \omega_0)$
5	$\sin 2\pi\omega_0 t$	$\frac{\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)}{2i}$

6	$\cos 2\pi\omega_0 t$	$\frac{\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)}{2}$
7	$e^{-\alpha t }$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2 + (2\pi\omega)^2}$
8	$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$	$\frac{1}{i\pi\omega}$
9	$\frac{1}{\pi t}$	$-i \text{sgn}(\omega)$
10	$1(t) = \begin{cases} 1, & t < 0 \\ 0, & t > 0 \end{cases}$	$\frac{1}{2}\delta(\omega) + \frac{1}{i\pi\omega}$
11	$e^{-\pi\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}$	$\tau e^{-\pi(\omega\tau)^2}$
12	$\delta'(t)$	$i2\pi\omega$
13	$i2\pi t$	$\delta'(-\omega) = -\delta'(\omega)$
14		
15		
16	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{n}{T})$

### Задачи для самостоятельного решения

**Задача 1.** Доказать, что если  $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ , то  $tf(t) \leftrightarrow -\frac{1}{i2\pi} \frac{dF(\omega)}{d\omega}$ .

**Задача 2.** Для функции  $f(t)$  найти спектральную характеристику  $F(\omega)$ :

а)  $f(t) = e^{-\alpha|t|} \operatorname{sgn}(t)$ ,  $\alpha > 0$ ; б)  $f(t) = \operatorname{sgn}(t)$ ;

в)  $1(t)$  – единичная функция Хевисайда:  $1(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

**Отв.:** а)  $F(\omega) = \frac{-i4p\omega}{a^2 + (2p\omega)^2}$ ; б)  $F(\omega) = \frac{1}{ip\omega}$ ; в)  $F(\omega) = \frac{1}{i2p\omega} + \frac{1}{2}d(\omega)$ .

**Задача 3.** Формально применив симметричное преобразование Фурье к  $\delta$ -функции, получить формулы:

а)  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i2p\omega t} d\omega = d(t)$ ; б)  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i2p\omega(t-t_0)} d\omega = d(t-t_0)$ .

**Задача 4.** Найти преобразование Фурье (несимметричное) функций:

а)  $f(t) = \cos \alpha t$ ; б)  $f(t) = \sin \alpha t$ .

**Отв.:** а)  $F(\omega) = 2\pi(\delta(\omega + \alpha) + \delta(\omega - \alpha))$ ; б)  $F(\omega) = i2\pi(\delta(\omega + \alpha) - \delta(\omega - \alpha))$ .

**Задача 5.** Найти симметричное преобразование Фурье функций:  $f(t) = \delta(t)$ ;

**Отв.:** 1.

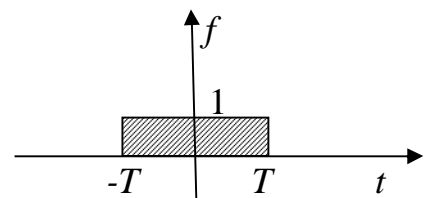
## § 5. Преобразование Гильберта и его свойства

### 5.1. Преобразование Фурье для прямоугольного сигнала и обратное к нему

**Задача 1.** Рассмотрим сигнал

прямоугольной формы  $f(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq T, \\ 0, & |t| > T. \end{cases}$

Найдем для него спектральную функцию:

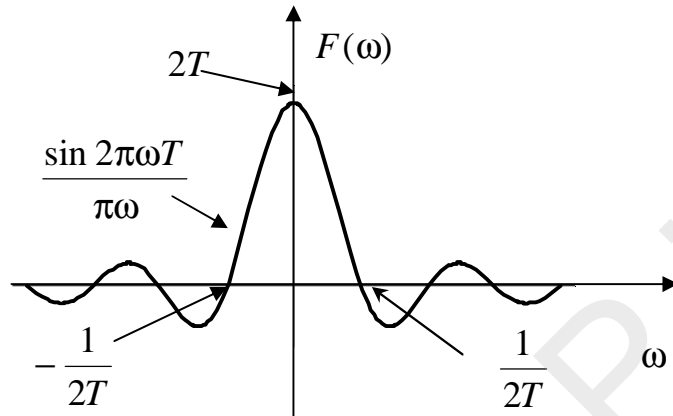


$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i2\pi\omega t} dt = \int_{-T}^T f(t)e^{-i2\pi\omega t} dt = \frac{e^{-i2\pi\omega t}}{-i2\pi\omega} \Big|_{t=-T}^{t=T} = \frac{e^{i2\pi\omega T} - e^{-i2\pi\omega T}}{i2\pi\omega} = \frac{\sin 2\pi\omega T}{\pi\omega}.$$

Исследуем график  $F(\omega)$ . Синусоида  $\sin 2\pi\omega T$  колеблется между графиками функций  $A(\omega) = \frac{1}{\pi\omega}$  и  $-A(\omega) = -\frac{1}{\pi\omega}$ . Амплитудная функция  $\frac{1}{\pi\omega}$  стремится к нулю, если  $\omega \rightarrow \infty$ , и

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} F(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} 2T \frac{\sin 2\pi\omega T}{2T\pi\omega} = 2T,$$

так как, согласно первому замечательному пределу,  $\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\sin 2\pi\omega T}{2\pi\omega} = 1$ . Отметим, что первыми нулями для  $F(\omega)$  будут  $\omega = \pm \frac{1}{2T}$ . Итак, график функции  $F(\omega)$  имеет вид



Заметим, что основная информация о функции  $F(\omega)$  сосредоточена на отрезке  $\left[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}\right]$ . На остальных участках числовой оси модуль функции  $F(\omega)$  резко идет на убыль. Отметим еще, что чем меньше значение  $T$ , тем шире отрезок  $\left[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}\right]$  максимальной значимости функции  $F(\omega) = \frac{\sin 2\pi\omega T}{\pi\omega}$ . И наоборот, чем больше  $T$ , тем уже отрезок  $\left[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}\right]$ .

Согласно принципу дуальности имеем  $\frac{\sin 2\pi Tt}{\pi t} \leftrightarrow F(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq T, \\ 0, & |\omega| > T. \end{cases}$

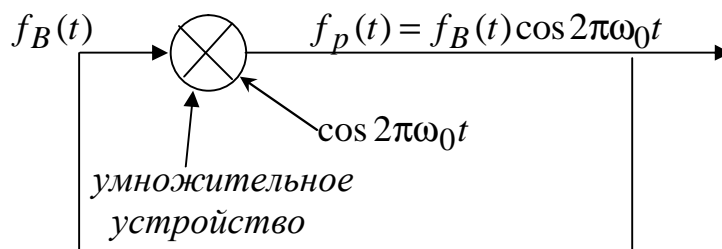
## 5.2. Схема простого модулятора

Рассмотрим видеосигнал  $f_B(t)$  с ограниченным спектром частот.



Выясним, как  $f_B(t)$  передается в эфир и улавливается приемником.

**I.** Вначале видеосигнал  $f_B(t)$  подается на умножительное устройство, схема которого такова:



Оператор, соответствующий этому умножительному устройству, называется *амплитудным модулятором (АМ)*. Он преобразует видеосигнал  $f_B(t)$  в радиосигнал  $f_p(t) = f_B(t) \cos 2\pi\omega_0 t$ .

Найдем спектральную схему этого устройства:

$$f_B(t) \leftrightarrow F_B(\omega);$$

$$\cos 2\pi\omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)].$$

Тогда  $f_p(t) = f_B(t) \cos 2\pi\omega_0 t$  будет соответствовать свертка

$$F_B(\omega) * \frac{1}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)].$$

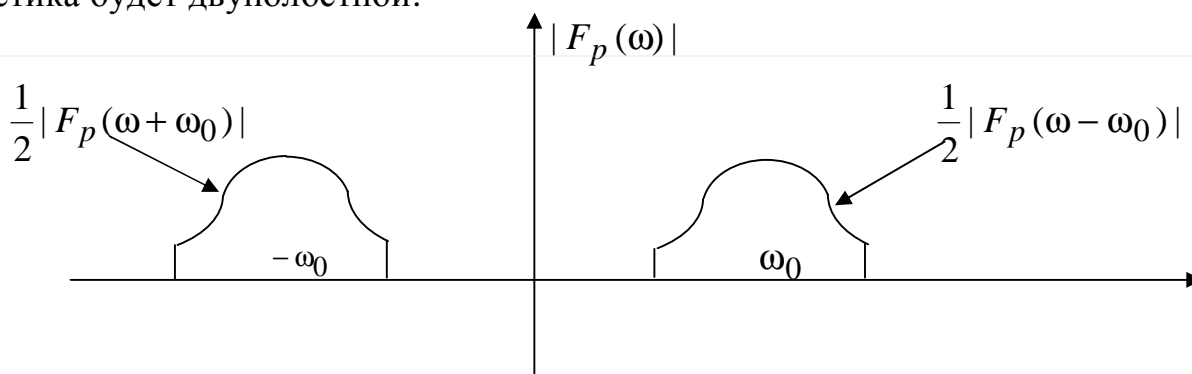
Напомним две теоремы соответствия  $f \leftrightarrow F$ :

$f(t)$	$F(\omega)$
$\varphi(t)$	$\Phi(\omega)$
$f * \varphi = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\varphi(t-u)du = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u)f(t-u)du$	$F(\omega) \Phi(\omega)$
$f(t) j(t)$	$F(\omega) * \Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)\Phi(\omega-u)du =$ $= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(u)F(\omega-u)du$

Тогда

$$F_p(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} [\delta(u - \omega_0) + \delta(u + \omega_0)] F_B(\omega - u) du = \frac{1}{2} F_B(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} F_B(\omega + \omega_0).$$

Если  $\omega_0$  достаточно велико, то для радиосигнала  $f_p(t)$  спектральная характеристика будет *двуполостной*:





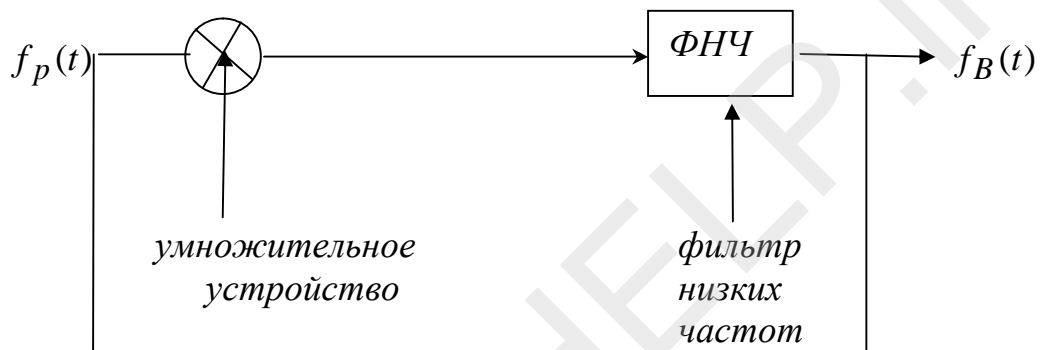
$$-\omega_0 - \omega_{\max} \quad \omega_{\max} - \omega_0 \quad \omega_0 - \omega_{\max} \quad \omega_{\max} + \omega_0 \quad \omega$$

Одна половина графика  $F_B(\omega)$  сдвигается влево на величину  $\omega_0$ , а другая половина – вправо на ту же величину  $\omega_0$ .

Замечание. Величина частоты  $\omega_0$  обычно подбирается так, чтобы левый и правый спектры не перекрывались. Тогда радиосигнал  $f_p(t)$  будет иметь *полосовой спектр* (состоящий из двух полос) с *несущей частотой*  $\omega_0$ .

А теперь исследуем, как восстанавливается сигнал  $f_B(t)$  в приемнике, который иногда называют *детектором* или *демодулятором* ( $\mathcal{D}$ ).

**II.** Схема детектора такова:



Детектор состоит из двух частей. Первая часть – это умножительное устройство. Оно умножает радиосигнал  $f_p(t)$  на  $2 \cos 2\pi\omega_0 t$ , выдавая в итоге

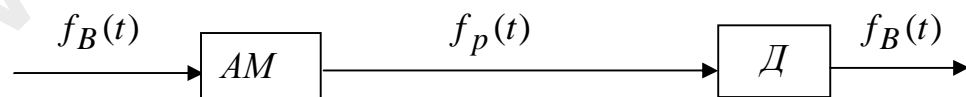
$$\begin{aligned} f_p(t) 2 \cos 2\pi\omega_0 t &= \\ &= f_B(t) \cdot 2 \cos^2 2\pi\omega_0 t = f_B(t)(1 + \cos 4\pi\omega_0 t) = f_B(t) + f_B(t) \cos 4\pi\omega_0 t. \end{aligned}$$

Вторая часть детектора – это идеальный фильтр низких частот ( $\Phi Н Ч$ ). Он пропускает сигналы только на частоте  $0 \leq \omega \leq \omega_{\max}$ , обрезаая все остальное:

$$\Phi Н Ч f(t) = \begin{cases} f_B(t), & |w| < w_{\max}, \\ 0, & |w| > w_{\max}. \end{cases}$$

$\Phi Н Ч$  зануляет слагаемое  $f_B(t) \cos 4\pi\omega_0 t$ .

Итак, кратко схема преобразований сигнала  $f_B(t)$  имеет вид:



Замечание. В  $AM$  и  $\mathcal{D}$  частота  $\omega_0$  настройки должна быть одна и та же.

Рассмотрим, что произойдет, если в детекторе настроечная частота будет содержать небольшую ошибку  $\omega_1 = \omega_0 + \Delta\omega$ . Тогда умножительное устройство даст:

$$\begin{aligned} f_p(t) 2 \cos(2\pi\omega_0 t + \alpha(t)) &= \\ &= f_B(t)(\cos \alpha + \cos 4\pi\omega_0 t) = f_B(t) \cos \alpha + f_B(t) \cos 4\pi\omega_0 t. \end{aligned}$$

ФНЧ – фильтр низких частот – отметет второе слагаемое и в итоге из нашего детектора выйдет сигнал

$$f_B(t) \cos \alpha = f_B(t) \cos 2\pi \Delta \omega t \cdot \alpha(t)$$

Если угол  $\alpha(t)$  приближается к  $90^\circ$ , то сигнал  $f_B(t)$  ослабляется до нулевого. Если  $\alpha(t) \rightarrow 0$ , то сигнал усиливается до  $f_B(t)$ . Другими словами, сила слышимости принимаемого сигнала с течением времени будет то затухать, то возрастать.

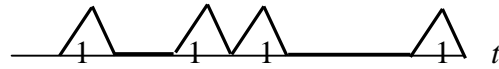
**Вывод:** для успешной совместной работы передатчика АМ и приемника Д, разделенных порой огромными расстояниями, необходима хорошая синхронизация их частот настроек. В противном случае технические устройства нужно менять.

### 5.3. Принцип неопределенности

На примере прямоугольного сигнала мы видели, что чем короче по длительности  $\Delta T$  сигнал, тем шире его спектр частот, и наоборот, чем длиннее по времени сигнал, тем короче спектр его частот. Аналогичное утверждение, называемое *принципом неопределенности*, справедливо для всех реальных сигналов: если длина сигнала по времени  $\Delta T$ , а ширина полосы его частот  $\Delta \omega$ , то  $\Delta T \cdot \Delta \omega = c$ , где  $c$  – константа, причем величина  $c$  неопределена.

Каково значение принципа неопределенности на практике?

Рассмотрим такой пример. Пусть сигнал (1,0,1,1,0,0,0,1) несет информацию в цифровой системе, причем и для 1, и для 0 сигналы имеют одинаковую протяженность  $\delta T$ . Тогда  $\Delta T = 8\delta T$  – протяженность нашего сигнала. Этим сигналом как амплитудным мы должны моделировать несущую функцию  $\cos 2\pi \omega_0 t$ .



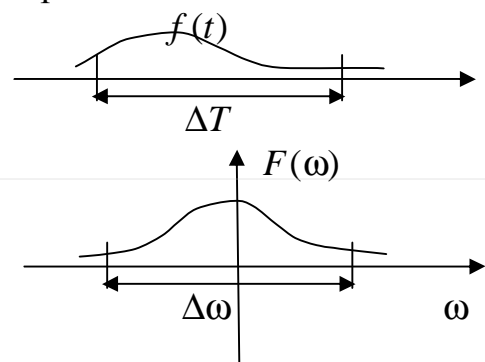
По техническим причинам полоса частот в приемнике ограничена  $|\omega| < w$ . Так как, согласно принципу неопределенности,  $\Delta T w = c$  – константа, то фиксация величины  $w$  влечет за собой ограничение  $w = \frac{c}{\Delta T}$  на скорость передачи, т.е.

$\Delta T$  должно быть подобрано соответствующим образом.

Заметим, что сигнал  $f(t)$  мы «урезаем» по времени, считая, что «хвосты» слева и справа от  $\Delta T$  можно не учитывать.

Аналогично, для спектральной характеристики  $F(\omega)$  мы «урезаем» область частот до  $\Delta \omega$ , пренебрегая «хвостами» слева и справа от  $\Delta \omega$ .

Поэтому постоянная  $c$  в формуле принципа неопределенности



$$\Delta T \cdot \Delta \omega = c$$

может быть найдена только приближенно.

Проблему неопределенности решил Д. Гильберт. Он также обосновал выбор подходящей частоты  $\omega_0$  для видеосигнала  $f_B(t)$ , обеспечивающей двухполосной спектр радиосигнала  $f_R(t)$ .

#### 5.4. Аналитический сигнал

Формула Эйлера

$$\cos \omega t = \frac{1}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}),$$

представляющая гармонические колебания в виде суммы двух комплексно-сопряженных функций, наводит на мысль, что и произвольный сигнал  $f(t)$  с известной спектральной функцией  $F(\omega)$  можно записать как сумму двух комплексных функций, одна из которых содержит только положительные частоты, а другая – только отрицательные частоты.

Напомним, что по формуле (2.13)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 F(\omega) e^{i\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (5.1)$$

В первом интеграле, входящем в формулу (5.1), частота  $\omega < 0$ , а во втором –  $\omega > 0$ . Отметим, что в (5.1) мы пользуемся частотой в радианах в секунду.

Назовем функцию

$$z_f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (5.2)$$

*аналитическим сигналом*. Это комплекснозначная функция сигнала  $f(t)$ .

Займемся теперь формулой (5.1), предварительно преобразовав в ней первое слагаемое:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 F(\omega) e^{i\omega t} d\omega &= \left. \begin{array}{l} \text{введем замену} \\ \omega_1 = -\omega \\ d\omega_1 = -d\omega \end{array} \right| = -\frac{1}{\pi} \int_{+\infty}^0 F(-\omega_1) e^{-i\omega_1 t} d\omega_1 = \\ &= \left. \begin{array}{l} \text{минус перед интегралом} \\ \text{уберем, поменяв пределы} \\ \text{интегрирования} \end{array} \right| = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} F(-\omega_1) e^{-i\omega_1 t} d\omega_1 = z_f^*(t). \quad (5.2) \end{aligned}$$

Поэтому формулу (5.1) можно переписать в виде

$$f(z) = \frac{1}{2} (z_f(t) + z_f^*(t))$$

или, что то же самое,

$$f(t) = \operatorname{Re} z_f(t).$$

Таким образом, оказывается, что сигнал  $f(t)$  представляет собой *вещественную часть аналитического сигнала*.

Обозначим через  $\tilde{f}(t)$  мнимую часть аналитического сигнала  $z_f(t)$ :

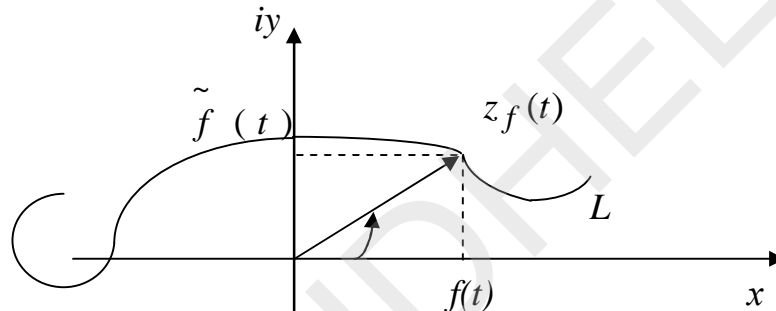
$$\tilde{f}(t) = \text{Im } z_f(t).$$

Назовем  $\tilde{f}(t)$  *сигналом, сопряженным к  $f(t)$* .

Итак, аналитический сигнал представляется следующим образом:

$$z_f(t) = f(t) + i \tilde{f}(t).$$

Геометрически аналитический сигнал имеет вид вектора, исходящего из начала координат комплексной плоскости, проекция которого на вещественную ось есть сигнал  $f(t)$ , а проекция на мнимую ось есть сопряженный к нему сигнал  $\tilde{f}(t)$ .



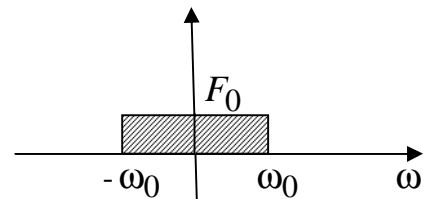
При изменении  $t$  конец вектора  $z_f(t)$  описывает некоторую кривую  $L$ .

Модуль  $|z_f(t)|$  вектора  $z_f(t)$  меняется со временем  $t$ ,  $\psi(t)$  – аргумент для  $z_f(t)$  – также зависит от  $t$  и называется *начальной фазой* в момент времени  $t$ .

Рассмотрим конкретный пример.

**п°1.** Пусть

$$F(\omega) = \begin{cases} F_0, & |\omega| < \omega_0, \\ 0, & |\omega| \geq \omega_0, \end{cases}$$



– спектральная функция сигнала  $f(t)$ .

Найдем для  $f(t)$  аналитический сигнал  $z_f(t)$ :

$$\begin{aligned} z_f(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_0} F_0 e^{i\omega t} d\omega = \frac{F_0}{\pi} \frac{e^{i\omega t}}{\omega t} \Big|_{\omega=0}^{\omega=\omega_0} = \frac{F_0 (e^{i\omega_0 t} - 1)}{i\pi t} = \\ &= \frac{F_0 (\cos \omega_0 t - 1 + i \sin \omega_0 t)}{i\pi t}. \end{aligned}$$

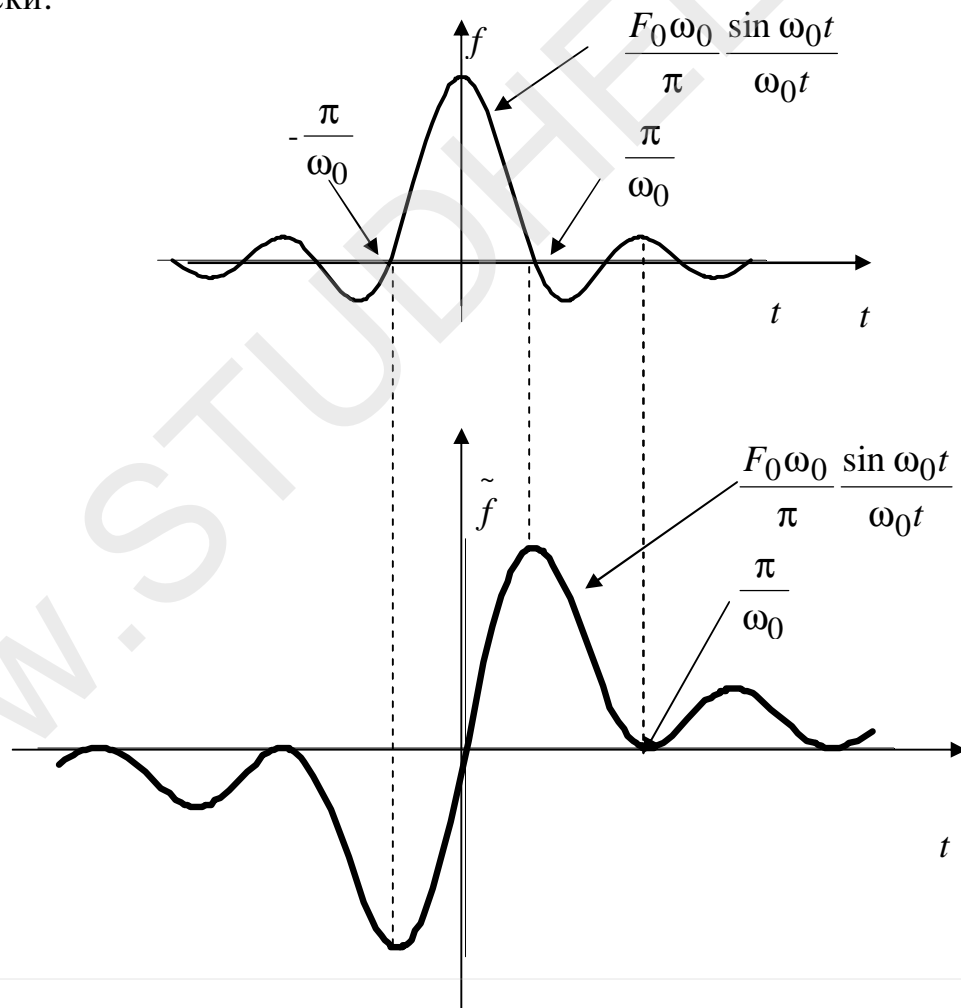
Таким образом,

$$z_f(t) = \frac{F_0 \sin \omega_0 t}{f(t)} + i \frac{F_0 (1 - \cos \omega_0 t)}{\tilde{f}(t)},$$

причем сигнал  $f(t) = \frac{F_0 \omega_0}{\pi} \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0 t}$ , а сопряженный сигнал

$$\tilde{f}(t) = \frac{F_0 \omega_0}{p} \frac{\sin^2 \frac{\omega_0 t}{2}}{\frac{\omega_0 t}{2}}.$$

Примечательно, что если в точке  $t_k$  функция  $f(t)$  имеет экстремум (максимум или минимум), то  $\tilde{f}(t_k) = 0$ . Обратное также верно: если  $f(t_k) = 0$ , то функция  $\tilde{f}(t)$  будет иметь экстремум в точке  $t_k$ . Проиллюстрируем сказанное геометрически:



### 5.5. Спектральная характеристика аналитического сигнала

Пусть  $z_f(t)$  – аналитический сигнал для  $f(t)$ , а  $Z_f(\omega)$  – его спектральная характеристика. По определению аналитического сигнала имеем

$$z_f(t) = \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

С другой стороны, в соответствии со свойствами преобразований Фурье:

$$z_f(t) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} Z_f(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Сравнивая два последних интеграла, обнаруживаем, что

$$Z_f(\omega) = \begin{cases} 2F(\omega), & \omega > 0, \\ 0, & \omega < 0. \end{cases} \quad (5.3)$$

Отметим, что если

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega),$$

$$\tilde{f}(t) \leftrightarrow \tilde{F}(\omega),$$

то

$$z_f(t) = f(t) + i\tilde{f}(t) \leftrightarrow F(\omega) + i\tilde{F}(\omega) = Z_f(\omega). \quad (5.4)$$

Сравнивая формулы (5.3) и (5.4), замечаем, что спектральная характеристика сопряженного сигнала должна иметь вид

$$\tilde{F}(\omega) = \begin{cases} -iF(\omega), & \omega > 0, \\ iF(\omega), & \omega < 0, \end{cases}$$

т.е.

$$\tilde{F}(\omega) = -iF(\omega) \operatorname{sgn}(\omega). \quad (5.5)$$

Покажем, что сопряженный сигнал можно восстановить как свертку функций, соответствующих  $F(\omega)$  и  $-i \operatorname{sgn}(\omega)$ . Напомним соответствующую теорему:

если

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega),$$

$$\varphi(t) \leftrightarrow \Phi(\omega),$$

то

$$f * \varphi = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \varphi(t-u) du = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u) f(t-u) du \leftrightarrow F(\omega) \Phi(\omega).$$

Несложно показать, что имеет место соответствие

$$\operatorname{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{1}{i\pi\omega}.$$

Умножая последнюю формулу на  $i$ , получим

$$i \operatorname{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{1}{\pi \omega},$$

а по дуальности

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi t} \leftrightarrow i \operatorname{sgn}(-\omega) = -i \operatorname{sgn}(\omega) = \Phi(\omega).$$

Так как, согласно условию,

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega),$$

то, используя теорему умножения спектральных функций, будем иметь:

$$\tilde{f}(t) = f * \varphi = f(t) * \frac{1}{\pi t} \leftrightarrow -i \operatorname{sgn}(\omega) F(\omega) = \Phi(\omega) F(\omega).$$

Итак, сопряженный сигнал  $\tilde{f}(t)$  есть свертка функций  $f(t)$  и  $\frac{1}{\pi t}$ :

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{t-u} du = H(f) \quad (5.6)$$

Формула (5.6) демонстрирует *прямое преобразование Гильберта*. Оператор  $H$  в формуле (5.6) называется *оператором Гильберта*. Он позволяет по данному сигналу  $f(t)$  построить сопряженный сигнал  $\tilde{f}(t)$ .

Из формулы (5.5) найдем  $F(\omega)$ :

$$F(\omega) = i \tilde{F}(\omega) \operatorname{sgn}(\omega).$$

Аналогичным образом, используя теорему умножения спектральных функций, несложно восстановить сигнал  $f(t)$  по сопряженному сигналу  $\tilde{f}(t)$ :

$$f(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}(u)}{t-u} du = H^{-1}(\tilde{f}). \quad (5.7)$$

Формула (5.7) демонстрирует *обратное преобразование Гильберта*. Оператор  $H^{-1}$  называется *оператором обратного преобразования Гильберта*.

Замечание. Прямое

$$\tilde{f}(t) = H(f(t)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)}{t-u} du$$

и обратное

$$f(t) = H^{-1}(\tilde{f}(t)) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}(u)}{t-u} du$$

преобразования Гильберта – это *интегральные преобразования с ядром*  $\frac{1}{t-u}$ .

Несобственные интегралы в преобразовании Гильберта обычно понимают в смысле главного значения вблизи особой точки  $u = t$ :

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{\pi} \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{t-\varepsilon} \frac{f(u)}{t-u} du + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t+\varepsilon}^{\infty} \frac{f(u)}{t-u} du \right],$$

$$f(t) = -\frac{1}{p} \left[ \lim_{e \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{t-e} \frac{\tilde{f}(u)}{t-u} du + \lim_{e \rightarrow 0} \int_{t+e}^{\infty} \frac{\tilde{f}(u)}{t-u} du \right].$$

### 5.6. Преобразование Гильберта для гармонических сигналов

Найдем значения оператора Гильберта  $H$  для простейших гармонических функций  $\cos \omega t$ ,  $\sin \omega t$ .

Пусть  $f(t)$  – произвольный сигнал, для которого  $F(\omega)$  – спектральная характеристика. Тогда, согласно обратному преобразованию Фурье,  $f(t)$  восстанавливается в виде интеграла

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) [\cos \omega t + i \sin \omega t] d\omega. \quad (5.8)$$

Напомним, что у сопряженного сигнала  $\tilde{f}(t)$  спектральная плотность есть  $-i \operatorname{sgn}(\omega) F(\omega)$  и  $\tilde{f}(t)$  также можно восстановить с помощью обратного преобразования Фурье в виде интеграла

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -i \operatorname{sgn}(\omega) F(\omega) [\cos \omega t + i \sin \omega t] d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i \operatorname{sgn}(\omega) F(\omega) [\sin \omega t - i \cos \omega t] d\omega. \quad (5.9)$$

Применяя к обеим частям формулы (5.8) оператор Гильберта  $H$  и используя формулу (5.9), получим:

$$H(f(t)) \stackrel{(5.8)}{=} H \left( \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) [\cos wt + i \sin wt] dw \right) = \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) [H(\cos wt) + iH(\sin wt)] dw =$$

$$= \tilde{f}(t) \stackrel{(5.9)}{=} \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(w) F(w) [\sin wt - i \cos wt] dw.$$

Сравнивая последние два интеграла, замечаем, что справедливы соотношения

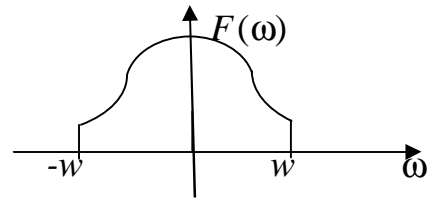
$$H(\cos \omega t) = \operatorname{sgn}(\omega) \sin(\omega t),$$

$$H(\sin \omega t) = -\operatorname{sgn}(\omega) \cos(\omega t).$$



### 5.7. Преобразование Гильберта для узкополосного сигнала

Мы уже отмечали, что если  $f_B(t)$  – узкополосной сигнал (т.е. его спектральная функция имеет график только на узкой полосе частот), то сигналы  $f_B(t)\cos\omega_0 t$  и  $f_B(t)\sin\omega_0 t$  также будут узкополосными. Следовательно, общий вид узкополосного сигнала такой:



$$s(t) = A_s(t)\cos\omega_0 t - B_s(t)\sin\omega_0 t, \quad (5.10)$$

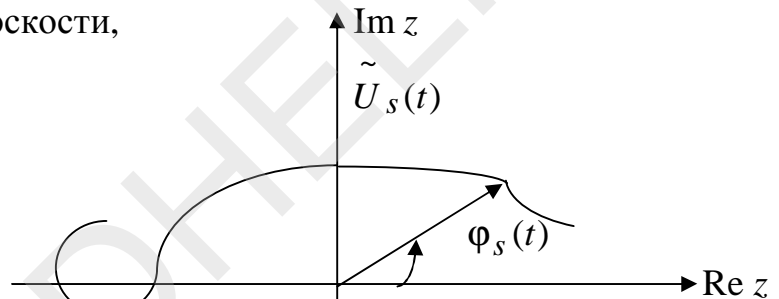
$A_s(t)$  и  $B_s(t)$  – произвольные узкополосные сигналы.

Для сигнала (5.10) удобно ввести комплексную низкочастотную функцию

$$\tilde{U}(t) = A_s(t) + iB_s(t),$$

называемую *оггибающей* для сигнала  $s(t)$ . Ее можно представить графически в виде вектора комплексной плоскости,

исходящего из начала координат, конец которого с изменением  $t$  описывает некоторую кривую.



Комплексное колебание с

амплитудной функцией  $\tilde{U}_s(t)$  и несущей частотой  $\omega_0$  выглядит так:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_s(t)e^{i\omega_0 t} &= (A_s(t) + iB_s(t))(\cos\omega_0 t + i\sin\omega_0 t) = A_s(t)\cos\omega_0 t - B_s(t)\sin\omega_0 t + \\ &+ i[B_s(t)\cos\omega_0 t + A_s(t)\sin\omega_0 t] \end{aligned} \quad (5.11)$$

Вещественная часть функции  $\tilde{U}_s(t)e^{i\omega_0 t}$  есть наш сигнал (5.10).

*Огибающая* сигнала  $s(t)$ , т.е. амплитудная функция, в любой момент времени  $t$  равна  $|\tilde{U}_s(t)| = |s(t)|$ ,  $|\tilde{U}_s| = \sqrt{A_s^2(t) + B_s^2(t)} = U_s(t)$ .

Тогда

$$\begin{aligned} s(t) &= U_s(t)\cos(\varphi_s(t) + \omega_0 t), \\ A_s(t) &= U_s(t)\cos\varphi_s(t), \\ B_s(t) &= U_s(t)\sin\varphi_s(t), \end{aligned}$$

где  $\varphi_s(t)$  – начальная фаза в момент времени  $t$ ,  $\omega_0$  – несущая частота.

Обозначим через  $\psi_s(t)$  *полную фазу узкополосного сигнала* в момент времени  $t$ :

$$\psi_s(t) = \varphi_s(t) + \omega_0 t.$$

Тогда  $\frac{d\psi_s(t)}{dt} = \varphi'_s(t) + \omega_0$  – мгновенная частота в момент времени  $t$ .

Комплексное колебание (5.11) является *аналитическим сигналом* для сигнала  $s(t)$ . Тогда коэффициент при мнимой части у него есть сопряженный к  $s(t)$  сигнал  $\tilde{s}(t)$ :

$$\begin{aligned}\tilde{s}(t) &= B_s(t) \cos \omega_0 t + A_s(t) \sin \omega_0 t, \\ s(t) &= A_s(t) \cos \omega_0 t - B_s(t) \sin \omega_0 t.\end{aligned}$$

Сигналы  $s(t)$  и  $\tilde{s}(t)$ : 1) ортогональны друг к другу на всей числовой оси:  $s(t)\tilde{s}(t) = 0$ ; 2) модули их комплексных огибающих одинаковы:

$$\begin{aligned}\tilde{U}_s &= A_s(t) - iB_s(t), \\ \tilde{U}_s^* &= B_s(t) + iA_s(t), \\ |\tilde{U}_s| &= \sqrt{A_s^2(t) + B_s^2(t)} = |\tilde{U}_s^*|.\end{aligned}$$

Поэтому  $s(t)$  и  $\tilde{s}(t)$  несут одинаковую энергию.

Перечислим еще раз основные свойства преобразования Гильберта.

Пусть  $f(t)$  – вещественный сигнал. Ему ставится в соответствие аналитический сигнал

$$z_f(t) = f(t) + i\tilde{f}(t),$$

имеющий спектральную функцию  $Z_f(\omega)$  лишь для положительных частот  $\omega$ ; причем

$$\operatorname{Re} z_f(t) = f(t) \text{ – исходный сигнал;}$$

$$\operatorname{Im} z_f(t) = \tilde{f}(t) \text{ – сопряженный сигнал;}$$

$$H(f) = \tilde{f}(t) \text{ – прямое преобразование Гильберта;}$$

$$H^{-1}(\tilde{f}) = f(t) \text{ – обратное преобразование Гильберта.}$$

Огибающая сигнала  $f(t)$  (если он радиосигнал) равна модулю  $|z_f(t)|$  аналитического сигнала  $z_f(t)$ .

$$\text{Полная фаза к моменту } t: \arg z_f(t) = \operatorname{arctg} \frac{\tilde{f}(t)}{f(t)} = \psi_f(t).$$

$$\text{Частота к моменту } t: \omega_{f(t)}(t) = \frac{d}{dt} \Psi_{f(t)} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\tilde{f}(t)}{f(t)} \right).$$

Опорная, самая выгодная частота для радиосигнала  $f_p(t) = f(t) \cos \omega_0 t$ , равна

$$\omega_0 = \max \omega_{f(t)}(t) = \max \frac{d}{dt} \left( \frac{\tilde{f}(t)}{f(t)} \right). \text{ Для частоты } \omega_0 \text{ спектр частот для } f_p(t)$$

будет двуполостным.

Заметим, что  $f(t)$  и  $\tilde{f}(t)$  ортогональны на всей числовой оси, т.е., образно говоря, если  $f(t)$  вблизи  $t$  ведет себя как косинус, то  $\tilde{f}(t)$  – как синус.

### Задачи для самостоятельного решения

**Задача 1.** Дан идеальный полосовой сигнал  $f(t)$ , спектральная характеристика для положительных частот имеет вид  $F(\omega) = \begin{cases} F_0, \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2, \\ 0, \omega \in (0, \omega_1) \cup (\omega_2, +\infty). \end{cases}$

Найти: аналитический сигнал, огибающую для исходного полосового сигнала, мгновенную частоту сигнала.

$$\text{Отв.: } z_f(t) = \frac{F_0}{pt} (\sin w_2 t - \sin w_1 t - i(\cos w_2 t - \cos w_1 t));$$

$$U_f(t) = \frac{F_0(w_2 - w_1)}{p} \left| \frac{\sin \frac{w_2 - w_1}{2} t}{\frac{w_2 - w_1}{2} t} \right|; \quad w_f(t) = \frac{w_1 + w_2}{2}.$$

**Задача 2.** Доказать, что последовательность функций  $f_n(t) = \begin{cases} \frac{n}{2}, |t| \leq \frac{1}{n}, \\ 0, |t| > \frac{1}{n}, \end{cases}$  сходится к  $\delta$ -функции.

## § 6. Решетчатые функции и их свойства. Z-преобразование, его свойства и приложения

### 6.1. Решетчатые функции

При анализе и синтезе дискретных и цифровых устройств широко используются *решетчатые* функции.

Пусть дана непрерывная функция  $f(t)$  (рис. 6.1).

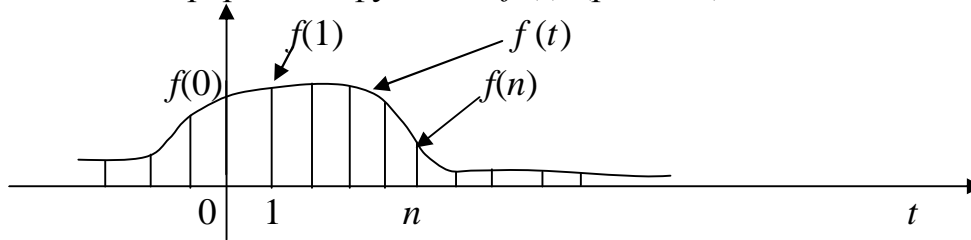


Рис. 6.1

Пройдем по оси  $t$  с шагом  $T=1$  и найдем множество значений функции  $f$  целочисленного аргумента  $n \in \mathbf{Z}$ :

$$\{f(n)\} = \{\mathbf{K}, f(-n), \mathbf{K}, f(-1), f(0), f(1), \mathbf{K}, f(n), \mathbf{K}\}$$

Если значения этого множества изобразить в виде отрезков, исходящих из точек  $n$  оси  $t$ , то получим картину, напоминающую решетку. Поэтому  $\{f(n)\}$  называется *решетчатой* функцией.

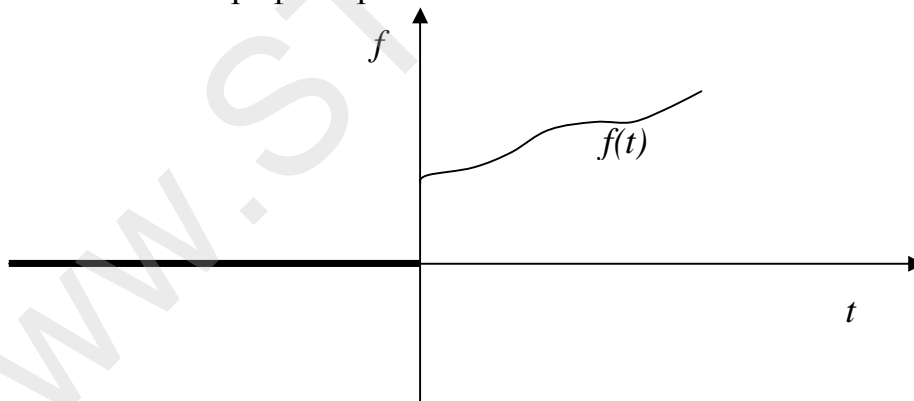
Заметим, что для инженера, как правило, неинтересно течение процесса, описываемого функцией  $f(t)$ , для времени  $t < 0$  (т.е. до начального момента времени), поэтому в дальнейшем мы вновь обратимся к преобразованию Лапласа, но применять его будем уже к *решетчатым оригиналам*.

Напомним, *оригинал*  $f(t)$  – это функция, подчиненная трем условиям:

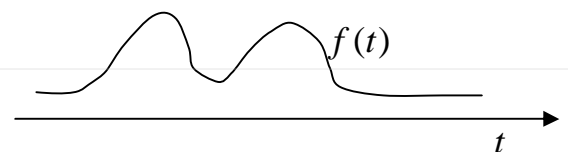
- 1)  $f(t)$  – кусочно-непрерывна на всей оси  $t$  с точками разрыва 1-го рода;
- 2)  $f(t) = 0$  для  $t < 0$ ;

3) при  $\forall t \in \mathbf{R}$  имеет место неравенство  $|f(t)| \leq M_0 e^{s_0 t}$ . Это условие дает ограничение в росте для  $|f(t)|$  по сравнению с некоторой показательной функцией  $M_0 e^{s_0 t}$ , где  $M_0$  и  $s_0$  – некоторые постоянные,  $M_0 > 0$ , а  $s_0 \leq 0$ .

Качественно график оригинала такой:



Замечание: множество оригиналов  $f(t)$  оказывается более широким, чем множество сигналов  $f(t)$  с конечной энергией, для которых мы пользовались преобразованием Фурье (мы пока рассматривали сигналы  $f(t)$ , для которых  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$ ).



Напомним, что оригиналу  $f(t)$  соответствует изображение  $F(p)$ , которое представляется несобственным интегралом

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt. \quad (6.1)$$

Заштрихованная часть формулы (6.1) – это оператор Лапласа. Условия 1) – 3) оригинала  $f(t)$  обеспечивают сходимость оператора Лапласа. Поэтому  $F(p)$  оказывается аналитической функцией комплексного переменного  $p = s + i\sigma$  в области  $D: \operatorname{Re} p > s_0$ , представляющей собой заштрихованную на рис. 6.2 часть полуплоскости.

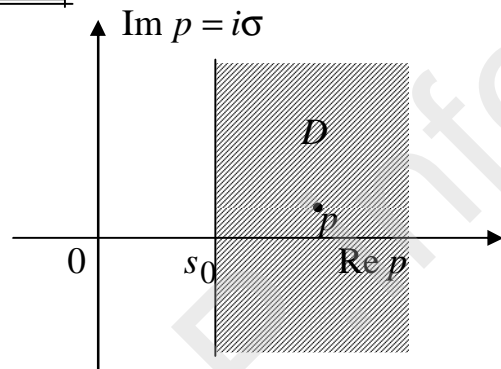
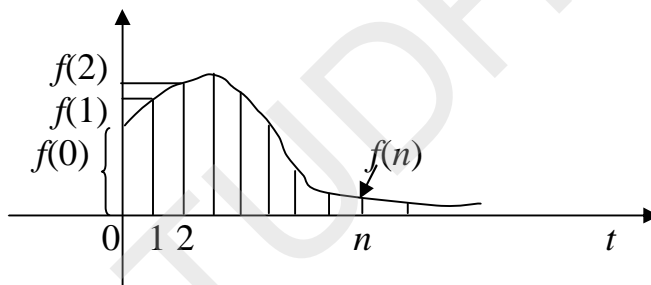


Рис. 6.2

## 6.2. Z-преобразование

Рассмотрим теперь решетчатый оригинал  $\{f(n)\}$ .



Отметим, что его можно представить как импульсный:

$$\tilde{f}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \delta(t - n).$$

Найдем изображение оригинала  $\tilde{f}(t)$ . Имеем:

$$\tilde{F}(p) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \int_0^{\infty} \delta(t - n) e^{-pt} dt = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) e^{-pn} = \quad (6.2)$$

$$= f(0) + f(1)e^{-p} + f(2)e^{-2p} + \dots + f(n)e^{-np} + \dots$$

Сделав в формуле (6.2) замену

$$z = e^p, \quad (6.3)$$

будем иметь:

$$\tilde{F}(p) = f(0) + \frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z^2} + \dots + \frac{f(n)}{z^n} + \dots = F(z). \quad (6.4)$$

Функция  $F(z)$  называется  $Z$ -изображением для  $\{f(n)\}$  (в дальнейшем фигурные скобки для простоты будем опускать).

Замена (6.3) преобразует область  $D: \operatorname{Re} p > s_0$  в область  $D': |z| > R_0 = e^{s_0}$ . На комплексной плоскости  $z$  область  $D'$  представляет собой внешность круга (см. заштрихованную часть на рис. 6.3).

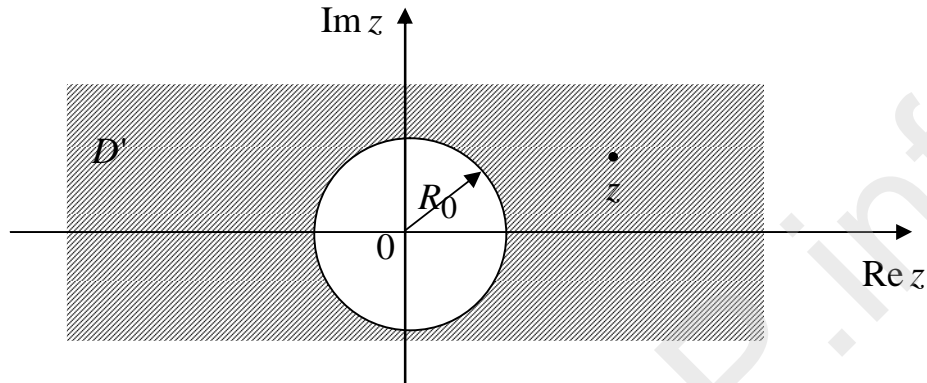


Рис. 6.3

Примечательно, что в области  $D'$  ряд Лорана, представляющий функцию  $F(z)$

$$F(z) = f(0) + \frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z^2} + \dots + \frac{f(n)}{z^n} + \dots,$$

сходится абсолютно и равномерно, а  $F(z)$  есть аналитическая функция от  $z$ .

Все свойства преобразования Лапласа переносятся на  $Z$ -преобразования. Посмотрим, как они теперь выглядят.

### 6.3. Свойства $Z$ -преобразования

Итак, имеет место соответствие

$$f(n) \leftrightarrow F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{z^n},$$

т.е. решетчатому оригиналу  $f(n)$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ , ставится в соответствие  $Z$ -изображение  $F(z)$  по указанному закону (6.4). Справедливы следующие теоремы:

**Теорема 6.1.** Оператор  $F$  – линейный, т.е. если  $f_1 \leftrightarrow F_1(z)$ ,  $f_2 \leftrightarrow F_2(z)$ , то  $c_1 f_1 + c_2 f_2 \leftrightarrow c_1 F_1(z) + c_2 F_2(z)$ , где  $c_1, c_2$  – произвольные числа.

**Теорема 6.2 (запаздывания аргумента).** Если  $f(n) \leftrightarrow F(z)$ , то

$$f(n-k) \leftrightarrow \frac{F(z)}{z^k}.$$

Δ Действительно, график функции  $f(n-k)$  – это график функции  $f(n)$ , сдвинутый на  $k$  шагов вправо по оси  $t$  как твердое тело (см. рис. 6.4).

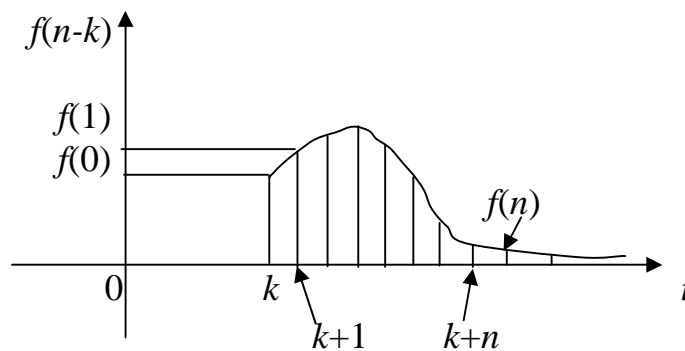


Рис. 6.4

Тогда  $f(n-k) \leftrightarrow \frac{f(0)}{z^k} + \frac{f(1)}{z^{k+1}} + \dots + \frac{f(n)}{z^{n+k}} + \dots = \frac{F(z)}{z^k}$ . ▲

**Теорема 6.3 (опережения аргумента).** Если  $f(n) \leftrightarrow F(z)$ , то

$$f(n+k) \leftrightarrow z^k \left[ F(z) - \left( f(0) + \frac{f(1)}{z} + \dots + \frac{f(k-1)}{z^{k-1}} \right) \right].$$

Δ Действительно, график функции  $f(n+k)$  – это график функции  $f(n)$ , сдвинутый на  $k$  шагов влево по оси  $t$  как твердое тело (см. рис. 6.5).

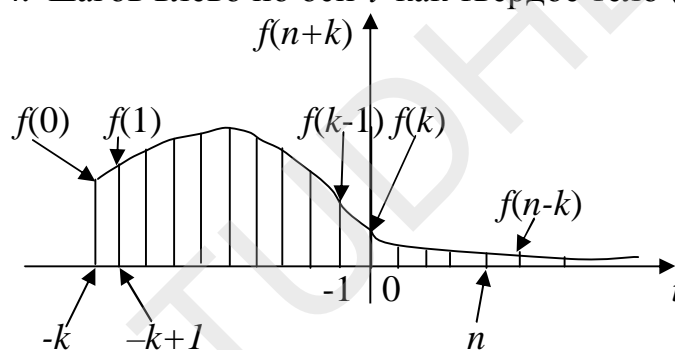


Рис. 6.5

Все, что расположено левее оси ординат, зануляется. Мы должны использовать только ту часть решетки, которая имеется справа от оси ординат, т.е. учитывать только значения  $f(k), \dots, f(n-k), \dots$

Итак, имеем:

$$\begin{aligned} f(n+k) &\leftrightarrow f(k) + \frac{f(k+1)}{z} + \frac{f(k+n)}{z^n} + \dots = \\ &= z^k \left[ F(z) - \left( f(0) + \frac{f(1)}{z} + \dots + \frac{f(k-1)}{z^{k-1}} \right) \right]. \end{aligned}$$

**Теорема 6.4 (подобия).** Если  $f(n) \leftrightarrow F(z)$ , то  $\frac{f(n)}{a^n} \leftrightarrow F(az)$ .

Δ Если  $f(n) \leftrightarrow F(z) \equiv f(0) + \frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z^2} + \dots + \frac{f(n)}{z^n} + \dots$ , то

$$\frac{f(n)}{a^n} \leftrightarrow F(z) \equiv f(0) + \frac{f(1)}{az} + \frac{f(2)}{(az)^2} + \dots + \frac{f(n)}{(az)^n} + \dots = F(az). \quad \blacktriangle$$

**Теорема 6.5 (о дифференцировании Z-изображения).** Если  $f(n) \leftrightarrow F(z)$ , то  $nf(n) \leftrightarrow -zF'(z)$ .

$\Delta$  По определению  $F(z) \equiv f(0) + \frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z^2} + \dots + \frac{f(n)}{z^n} + \dots$ . Продифференцируем по  $z$  это тождество (это можно сделать, так как ряд Лорана равномерно сходится к  $F(z)$ ):  $F'(z) \equiv -\frac{f(1)}{z^2} - 2\frac{f(2)}{z^3} - \dots - n\frac{f(n)}{z^{n+1}} + \dots$ . А теперь умножим на

$$(-z) \text{ обе части последнего равенства: } -zF'(z) \equiv \frac{f(1)}{z} + 2\frac{f(2)}{z^2} + \dots + n\frac{f(n)}{z^n} + \dots$$

Всмотревшись в коэффициенты последнего ряда Лорана, замечаем, что справедливо соответствие  $nf(n) \leftrightarrow -zF'(z)$ .  $\blacktriangle$

**Теорема 6.6 (о свертке).** Если  $f(n) \leftrightarrow F(z)$ ,  $\varphi(n) \leftrightarrow \Phi(z)$ , то

$$f(n) * \varphi(n) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)\varphi(n-k) \leftrightarrow F(z)\Phi(z).$$

$\Delta$  Обозначим через  $g(n)$  свертку двух решетчатых функций  $f(n)$  и  $\varphi(n)$ :

$$g(n) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)\varphi(n-k), \text{ а через } G(z) \text{ — } Z\text{-изображение для } g(n). \text{ По определению}$$

нию

$$\begin{aligned} G(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g(n)}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} f(k)\varphi(n-k)}{z^n} = \left| \text{изменим порядок суммирования} \right| = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f(k) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(n-k)}{z^n} = \left| \begin{array}{l} \text{введем замену} \\ m = n - k \\ n = m + k \end{array} \right| = \sum_{k=0}^{\infty} f(k) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi(m)}{z^{m+k}} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(k)}{z^k} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi(m)}{z^m} = F(z)\Phi(z). \end{aligned}$$

Итак, необходимые нам в дальнейшем теоремы мы обсудили. Теперь составим для дальнейшего использования на практике таблицу соответствия  $f(n) \leftrightarrow F(z)$ .

$$\text{п}^\circ 1. f(n) = a^n \leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^n} = 1 + \frac{a}{z} + \frac{a^2}{z^2} + \dots + \frac{a^n}{z^n} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z - a}.$$



$$\text{п}^\circ 2. f(n) = e^{j\beta n} \leftrightarrow \frac{z}{z - e^{j\beta}}. \text{ Тогда для } f(n) = e^{-j\beta n} \leftrightarrow \frac{z}{z - e^{-j\beta}}.$$

$$\text{п}^\circ 3. \cos \beta n = \frac{e^{j\beta n} + e^{-j\beta n}}{2} \leftrightarrow \frac{1}{2} \left[ \frac{z}{z - e^{j\beta}} + \frac{z}{z - e^{-j\beta}} \right] = \frac{z(z - \cos \beta n)}{z^2 - 2z \cos \beta + 1}.$$

$$\text{п}^\circ 4. \sin \beta n = \frac{z \sin \beta}{z^2 - 2z \cos \beta + 1}.$$

$$\text{п}^\circ 5. f(n) = 1 = 1^n \leftrightarrow \frac{z}{z - 1}.$$

$$\text{п}^\circ 6. f(n) = (-1)^n \leftrightarrow \frac{z}{z + 1}.$$

$$\text{п}^\circ 7. \varphi(n) = n f(n) = n \cdot 1^n \leftrightarrow (-z) \left( \frac{z}{z - 1} \right)' = \frac{z}{(z - 1)^2}.$$

$$\text{п}^\circ 8. n^2 = n \varphi(n) \leftrightarrow -z \left( \frac{z}{(z - 1)^2} \right)' = \frac{z(z + 1)}{(z - 1)^3}.$$

Рассмотрим теперь вопрос о восстановлении функции  $f(n)$  по ее  $Z$ -изображению  $F(z)$ .

**Задача 1.** Дано  $F(z)$ . Найти  $f(n)$ .

Δ Приступая к обсуждению решения этой задачи, прежде всего вспомним, что

$$F(z) \equiv f(0) + \frac{f(1)}{z} + \frac{f(2)}{z^2} + \dots + \frac{f(n)}{z^n} + \dots \quad (6.5)$$

Ряд Лорана в тождестве (6.5) сходится абсолютно и равномерно в области  $D'$  (см. рис. 6.6).

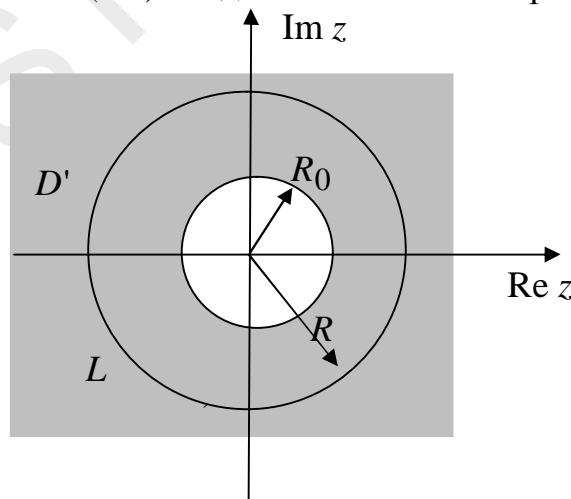


Рис. 6.6

Возьмем в области  $D'$  окружность  $L$  радиуса  $R > R_0 = e^{s_0}$ .

Умножим обе части тождества (6.5) на  $z^{n-1}$  и проинтегрируем по окружности  $L$  обе части полученного тождества

$$\oint_L F(z)z^{n-1} dz = \oint_L \left( f(0)z^{n-1} + \frac{f(1)z^{n-1}}{z} + \dots + \frac{f(n)z^{n-1}}{z^n} + \dots \right) dz =$$

ряд  $f(0)z^{n-1} + \frac{f(1)z^{n-1}}{z} + \dots + \frac{f(n)z^{n-1}}{z^n} + \dots$  сходится равномерно,  
 поэтому интеграл от суммы равен  
 сумме интегралов от слагаемых

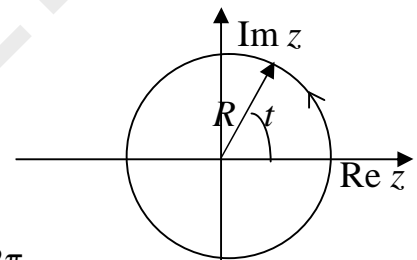
$$= f(0) \oint_L z^{n-1} dz + f(1) \oint_L z^{n-2} dz + \mathbf{K} + f(n) \oint_L \frac{dz}{z} + \mathbf{K} + f(m) \oint_L \frac{dz}{z^{m-n+1}} + \mathbf{K}. \quad (6.6)$$

Напомним, что в комплексном анализе мы доказывали, что

$$\oint_L \frac{dz}{z^{m-n+1}} = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ 2\pi i, & \text{если } m = n. \end{cases} \quad (6.7)$$

Покажем еще раз, как можно доказать формулу (6.7):

$$1) \oint_{L:|z|=R} \frac{dz}{z} = \left| \begin{array}{l} z = Re^{it} \\ dz = Rie^{it} dt \end{array} \right| = \int_0^{2\pi} \frac{i Re^{it} dt}{Re^{it}} = \int_0^{2\pi} i dt = i2\pi.$$



$$2) k \neq 1: \oint_{L:|z|=R} \frac{dz}{z^k} = \left| \begin{array}{l} z = Re^{it} \\ dz = Rie^{it} dt \end{array} \right| = \int_0^{2\pi} \frac{i Re^{it} dt}{(Re^{it})^k} = \frac{i}{R^k} \int_0^{2\pi} e^{-i(k-1)t} dt =$$

$$= \left. \begin{array}{l} \frac{ie^{-i(k-1)t}}{Ri(k-1)} \Big|_0^{2\pi} \\ \text{в силу периодичности функции} \\ e^{-i(k-1)t} \text{ результаты подстановки} \\ \text{верхнего и нижнего пределов} \\ \text{совпадают; поэтому при вычитании} \\ \text{получаем ноль} \end{array} \right| = 0.$$

Таким образом, в правой части тождества (6.6) остается только одно слагаемое, отличное от нуля, и это тождество можно переписать так:

$$\oint_L F(z)z^{n-1} dz = f(n)2\pi i.$$

Откуда и определяется  $f(n)$ :

$$f(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L F(z)z^{n-1} dz. \quad (6.8)$$

К интегралу, стоящему в правой части формулы (6.8), можно применить теорию вычетов. Поэтому справедлива

**Теорема 6.7.** Если  $a_1, a_2, \dots, a_m$  – особые точки функции  $F(z)$  в области  $|z| \leq R_0 = e^{s_0}$ , то

$$f(n) = \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}_{a_k} F(z) z^{n-1}. \quad (6.9)$$

Замечание. Если, в частности,  $F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$  – несократимая дробь и  $a_1, a_2, \dots, a_m$  – простые корни знаменателя  $Q(z)$ , то

$$f(n) = \sum_{k=1}^m \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)} a_k^{n-1}.$$

Напомним, что

а) если  $a$  – простой полюс, то

$$\operatorname{Res}_a F(z) z^{n-1} = \lim_{z \rightarrow a} F(z) z^{n-1} (z - a);$$

б) если  $a$  – полюс кратности  $l$ , то

$$\operatorname{Res}_a F(z) z^{n-1} = \frac{1}{(l-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{l-1} [F(z) z^{n-1} (z-a)^l]}{dz^{l-1}}.$$

Рассмотрим примеры.

**п°9.**  $F(z) = \frac{z+1}{z^2+2z+3} = \frac{z+1}{(z-1)(z+3)}$ . Найти  $f(n)$ .

Δ Точки  $z_1 = 1, z_2 = 3$  – простые полюса. Поэтому

$$\begin{aligned} f(n) &= \operatorname{Res}_{z=1} F(z) z^{n-1} + \operatorname{Res}_{z=3} F(z) z^{n-1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z+1)z^{n-1}}{z+3} + \\ &+ \lim_{z \rightarrow 3} \frac{(z+1)z^{n-1}}{z-1} = \frac{1}{2} + \frac{(-3)^{n-1}}{2}. \end{aligned}$$

**п°10.**  $F(z) = \frac{z+3}{(z-1)^3}$ . Найти  $f(n)$ .

Δ Здесь  $z = 1$  – особая точка, полюс 3-го порядка. Поэтому

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 1} [F(z) z^{n-1} (z-1)^3]'' = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 1} [(z+3)z^{n-1}]'' = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 1} [z^n + 3z^{n-1}]'' = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 1} [n(n-1)z^{n-2} + 3(n-1)(n-2)z^{n-3}] = \frac{1}{2} (n-1)(n+3n-6) = (n-1)(2n-3). \end{aligned}$$



#### 6.4. Решение разностных уравнений и систем разностных уравнений с помощью $Z$ -преобразования

Рассмотрим приложения  $Z$ -преобразования к решению линейных разностных уравнений (РУ). Линейные разностные уравнения получаются из линейных

дифференциальных уравнений для импульсных (или решетчатых) функций. Например, пусть даны уравнения

$$y' = f(x), \quad (6.10)$$

$$y'' + ay' + by = f(x). \quad (6.11)$$

Считаем, что  $y(x)$  – решетчатая функция, т.е. она задается таблицей значений в равноотстоящих узлах с шагом  $h = 1$ .

$x_n$	$y(x_n)$	$y'(x_n)$	$y''(x_n)$
0	$y_0$		$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) =$
1	$y_1$	$\Delta y_0 = y_1 - y_0$	
2	$y_2$	$\Delta y_1 = y_2 - y_1$	...
3	$y_3$	$\Delta y_2 = y_3 - y_2$	...
...	...	...	...
$n$	$y_{n-1}$	$\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$	$\Delta^2 y_{n-1} = \Delta y_n - \Delta y_{n-1} = (y_{n+1} - y_n) -$ $-(y_n - y_{n-1}) = y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}$
$n-1$	$y_n$	$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$	
$n+1$	$y_{n+1}$		

Разности 1-го порядка  $\Delta y_0, \Delta y_1, \dots, \Delta y_n$  при шаге  $h = 1$  приближают производные 1-го порядка, а разности 2-го – производные 2-го порядка.

Уравнение (6.10) в узле  $n$  переписывается так:

$$y(n+1) - y(n) = f(n) \quad (6.12)$$

(6.12) – линейное разностное уравнение первого порядка.

Дифференциальное уравнение (6.11) в  $n$ -ом узле имеет вид:

$$y(n+2) - 2y(n+1) + y(n) + a[y(n+1) - y(n)] + by(n) = f(n). \quad (6.13)$$

(6.13) – линейное разностное уравнение второго порядка.

Итак, каждое линейное дифференциальное уравнение всегда можно свести к соответствующему линейному разностному уравнению.

Теперь обсудим вопрос о том, как в общем случае решать линейные разностные уравнения  $k$ -го порядка.

**Задача 2.** Дано линейное разностное уравнение

$$L[y] = A_0 y(n+k) + A_1 y(n+k-1) + A_2 y(n+k-2) + \dots + A_k y(n) = f(n) \quad (6.14)$$

при начальных условиях

$$y(0) = y_0, y(1) = y_1, \dots, y(n-1) = y_{n-1},$$

где  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$  – заданные числа.

Найти всю бесконечную последовательность значений  $y(n), y(n+1), y(n+2), \dots$ .

Приступая к решению этой задачи, полагаем, что  $f(n) \leftrightarrow F(z)$ ,  $y(n)$  – решетчатый оригинал, а  $Y(z)$  – его  $Z$ -изображение. Имеем:

$$y(n) \leftrightarrow Y(z),$$

$$y(n+1) \leftrightarrow z[Y(z) - y_0],$$

$$y(n+2) \leftrightarrow z^2[Y(z) - (y_0 + y_1/z)],$$

.....

$$y(n+k-1) \leftrightarrow z^{k-1}[Y(z) - (y_0 + y_1/z + y_2/z^2 + \dots + y_{k-2}/z^{k-2})],$$

$$y(n+k) \leftrightarrow z^k[Y(z) - (y_0 + y_1/z + y_2/z^2 + \dots + y_{k-1}/z^{k-1})].$$

Теперь, комбинируя оригиналы, стоящие слева, с коэффициентами  $A_k, \dots, A_0$ , в силу линейности соответствия получим комбинацию их  $Z$ -изображений с теми же коэффициентами:

$$L[y] \leftrightarrow Y(z)(A_0 z^k + A_1 z^{k-1} + A_{k-1} z + A_k) - y_0(A_0 z^k + A_1 z^{k-1} + A_{k-1} z) - \\ - y_1(A_0 z^{k-1} + A_1 z^{k-2} + A_{k-2} z) - \dots - y_{k-1} A_0 z.$$

Замечаем, что коэффициент при  $y_0$  получается просто отбрасыванием свободного коэффициента при  $Y(z)$ . Коэффициент при  $y_i$  получается из коэффициента при  $y_{i-1}$  делением на  $z$  и отбрасыванием свободного члена.

Так как должно быть тождество (6.14) решетчатых оригиналов, то должны совпадать и их  $Z$ -изображения. Итак, получаем операторное  $Z$ -изображение:

$$L[y] \leftrightarrow Y(z)(A_0 z^k + A_1 z^{k-1} + A_{k-1} z + A_k) - y_0(A_0 z^k + A_1 z^{k-1} + A_{k-1} z) - \\ - y_1(A_0 z^{k-1} + A_1 z^{k-2} + A_{k-2} z) - \dots - y_{k-1} A_0 z \equiv F(z). \quad (6.15)$$

Уравнение (6.15) легко решается относительно  $Y(z)$ . Запишем его так:

$$Y(z)\varphi(z) - \psi(z) \equiv F(z),$$

$$Y(z) = \frac{F(z) + \psi(z)}{\varphi(z)}.$$

Остается только стандартным путем через вычеты восстановить решетчатый оригинал  $y(n)$ . ▲

Аналогично решаются системы линейных разностных уравнений.

Рассмотрим пример.

**п°11.** Дано: РУ второго порядка

$$y(n+2) - y(n) = 2^n \quad (6.16)$$

при начальных условиях  $y(0) = y(1) = 0$ . Найти  $y(n)$ .

Δ Пусть

$$y(n) \leftrightarrow Y(z). \quad (6.17)$$

Тогда

$$y(n+2) \leftrightarrow z^2[Y(z) - (y_0 + y_1/z)]. \quad (6.18)$$

Комбинируя соотношения (6.17) и (6.18) с коэффициентами  $-1, 1$  уравнения (6.16) и учитывая, что выражение  $y_0 + y_1/z$  равно нулю в силу начальных условий, получим:

для левой части (6.16):  $y(n+2) - y(n) \leftrightarrow Y(z)(z^2 - 1)$ ;

для правой части (6.16):  $2^n \leftrightarrow \frac{z}{z-2}$ .

Операторное уравнение

$$Y(z)(z^2 - 1) = \frac{z}{z-2}$$

имеет решение

$$Y(z) = \frac{z}{(z^2 - 1)(z - 2)}.$$

Здесь особые точки  $z_1 = 1, z_2 = -1, z_3 = 2$ . Тогда по формуле (6.9) находим:

$$y(n) = \underset{z=1}{\text{Res}} Y(z) z^{n-1} + \underset{z=-1}{\text{Res}} Y(z) z^{n-1} + \underset{z=2}{\text{Res}} Y(z) z^{n-1} = -\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{6} + \frac{2^n}{3}. \blacktriangle$$

**п°12.** Дано линейное разностное уравнение 2-го порядка

$$y(n+2) - 5y(n+1) + 6y(n) = 1 \quad (6.19)$$

при начальных условиях  $y(0) = 1, y(1) = -1$ . Найти  $y(n)$ .

Δ Пусть

$$y(n) \leftrightarrow Y(z). \quad (6.20)$$

Тогда

$$\begin{aligned} y(n+1) &\leftrightarrow z[Y(z) - y_0] = z[Y(z) - 1]; \\ y(n+2) &\leftrightarrow z^2[Y(z) - y_0 - y_1/z] = z^2[Y(z) - 1 + 1/z] \end{aligned} \quad (6.21)$$

Умножая формулы (6.20) – (6.21) соответственно на 6, -5, 1, получим:

$$y(n+2) - 5y(n+1) + 6y(n) \leftrightarrow Y(z)[z^2 - 5z + 6] - (z^2 - 5z) + z.$$

Для правой части уравнения (6.19), будем иметь:

$$1 \leftrightarrow \frac{z}{z-1}.$$

Операторное уравнение

$$Y(z)[z^2 - 5z + 6] - (z^2 - 5z) + z = \frac{z}{z-1}$$

имеет решение

$$Y(z) = \frac{z^3 - 7z^2 + 7z}{(z-1)(z^2 - 5z + 6)} = \frac{z^3 - 7z^2 + 7z}{(z-1)(z-2)(z-3)}.$$

Функция  $Y(z)$  представляет собой несократимую дробь, знаменатель которой имеет простые корни  $z_1 = 1, z_2 = 2, z_3 = 3$ . Тогда по формуле (6.9) находим:

$$y(n) = \underset{z=1}{\text{Res}} Y(z) z^{n-1} + \underset{z=2}{\text{Res}} Y(z) z^{n-1} + \underset{z=3}{\text{Res}} Y(z) z^{n-1} = \frac{1}{2} + 3 \cdot 2^n - \frac{5}{2} \cdot 3^n.$$

Проверим, выполняются ли начальные условия:

$$y(0) = \frac{1}{2} + 3 - \frac{5}{2} = 1, y(1) = \frac{1}{2} + 6 - \frac{15}{2} = -1.$$

Значит, функция  $y(n) = \frac{1}{2} + 3 \cdot 2^n - \frac{5}{2} \cdot 3^n$  является решением исходной зада-

чи. ▲

п°13. Решить систему линейных разностных уравнений

$$\begin{cases} x(n+1) - x(n) - y(n) = 3^n, \\ y(n+1) + 2x(n) = -3^n, \end{cases} \quad (6.22)$$

при начальных условиях  $x(0) = 3, y(0) = 0$ .

Δ Пусть  $x(n)$  – решетчатый оригинал, а  $X(z)$  – его Z-изображение. Тогда с учетом начальных условий будем иметь

$$x(n) \leftrightarrow X(z);$$

$$x(n+1) \leftrightarrow z[X(z) - x(0)] = z[X(z) - 3].$$

Аналогично

$$y(n) \leftrightarrow Y(z),$$

$$y(n+1) \leftrightarrow z[Y(z) - y(0)] = zY(z),$$

$$3^n \leftrightarrow \frac{z}{z-3}.$$

Операторная Z-система, соответствующая системе (6.22), выглядит так:

$$\begin{cases} z[X(z) - 3] - X(z) + Y(z) = \frac{z}{z-3}, \\ zY(z) + 2X(z) = -\frac{z}{z-3}, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (z-1)X(z) + Y(z) = \frac{3z^2 - 8z}{z-3}, \\ 2X(z) + zY(z) = -\frac{z}{z-3}. \end{cases}$$

Решая последнюю систему по правилу Крамера, получим:

$$X(z) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{3z^2 - 8z}{z-3} & 1 \\ -\frac{z}{z-3} & z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z-1 & 1 \\ 2 & z \end{vmatrix}} = \frac{\frac{3z^3 - 8z^2}{z-3} + \frac{z}{z-3}}{z^2 - z - 2} = \frac{z(3z^2 - 8z + 1)}{(z-3)(z+1)(z-2)};$$

$$Y(z) = \frac{\begin{vmatrix} z-1 & 3z^2-8z \\ 2 & z-3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z-1 & 1 \\ 2 & z \end{vmatrix}} = \frac{z-z^2-6z^2+16z}{z^2-z-2} = \frac{17z-7z^2}{(z-3)(z+1)(z-2)}.$$

Осталось по данным Z-изображениям  $X(z)$  и  $Y(z)$  восстановить решетчатые оригиналы. Используя формулу (6.9) и вычисляя вычеты в простых полюсах  $z_1 = -1, z_2 = 2, z_3 = 3$ , получим:

$$\begin{aligned} x(n) &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{(3z^2 - 8z + 1)z^n}{(z-2)(z-3)} + \lim_{z \rightarrow 2} \frac{(3z^2 - 8z + 1)z^n}{(z+1)(z-3)} + \lim_{z \rightarrow 3} \frac{(3z^2 - 8z + 1)z^n}{(z+1)(z-2)} = \\ &= \frac{3+8+1}{12}(-1)^n + \frac{12-16+1}{-3}2^n + \frac{27-24+1}{4}3^n = (-1)^n + 2^n + 3^n; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(n) &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{(17-7z)z^n}{(z-2)(z-3)} + \lim_{z \rightarrow 2} \frac{(17-7z)z^n}{(z+1)(z-3)} + \lim_{z \rightarrow 3} \frac{(17-7z)z^n}{(z+1)(z-2)} = \\ &= 2(-1)^n - 2^n - 3^n. \end{aligned}$$

Сделаем контрольную проверку начальных условий:

$$x(0) = 1 + 1 + 1 = 3, y(0) = 2 - 1 - 1 = 0.$$

Начальные условия выполняются. Следовательно, функции

$$x(n) = (-1)^n + 2^n + 3^n, y(n) = 2(-1)^n - 2^n - 3^n$$

являются решением исходной задачи. ▲

### Задачи для самостоятельного решения

**Задача 1.** Найти Z-преобразование для данных решетчатых функция:

а)  $f(n) = 1$ ; б)  $f(n) = (-1)^n$ .

**Задача 2.** Восстановить последовательность  $f(n)$  по ее Z-преобразованию.

$$F(z) = \frac{1}{z-a}.$$

**Задача 3.** Решить уравнение:  $x(n+2) - 5x(n+1) + 6x(n) = 0, x(0) = 1, x(1) = 2$ .

**Отв.:**  $x(n) = 2^n$ .

**Задача 4.** Решить систему разностных уравнений:

$$x(n+2) - x(n+1) - x(n) = 0, x(0) = 0, x(1) = 1.$$

$$\text{Отв.: } x(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right];$$



## § 7. Вариационное исчисление

Вариационное исчисление зародилось в 1696 г., когда Иоганн Бернулли поставил задачу об отыскании кривой «наибыстрейшего спуска» – «брахистохроне». Эта задача формулируется так:

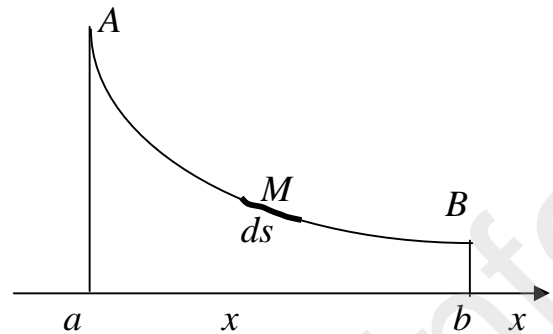


Рис. 7.1

из точки  $A$  в точку  $B$  (рис. 7.1) под действием силы тяжести без начальной скорости движется точка  $M(x, y(x))$ . Какой должна быть кривая  $AB$ :

$$y = y^*(x), x \in [a, b],$$

чтобы время спуска по ней было минимальным?

По закону сохранения энергии имеем

$$\frac{mv^2}{2} = mgy,$$

откуда

$$v = \sqrt{2gy}.$$

Тогда время пробега отрезка  $ds$  кривой  $AB$  находится так:

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{dx^2 + d^2 y(x)}}{\sqrt{2gy(x)}} = \frac{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}}{\sqrt{2gy(x)}} dx,$$

а время спуска вдоль всей кривой  $AB$  определится интегралом

$$\int_a^b \frac{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}}{\sqrt{2gy(x)}} dx.$$

К концу 20 века вариационное исчисление, получившее свое обоснование в работах Л. Эйлера, Ж. Л. Лагранжа, А.М. Лежандра и К. Вейерштрасса, переросло в математическую теорию оптимального управления, основателями которой явились Л.С. Понтрягин (Россия) и Р.Э. Беллман (США).

### Простейшая задача вариационного исчисления

**Задача 1.** Дан функционал

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x)) dx, \quad (7.1)$$

сопоставляющий каждой кривой  $AB$

$$y = y(x), x \in [a, b],$$

некоторое число  $J[y(x)]$ .

Функция  $F(x, y, y')$  предполагается гладкой, т.е. ее частные производные до второго порядка включительно по всем аргументам  $x, y, y'$  непрерывны в области

$$D: \left\{ \begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ -\infty < y < +\infty \\ -\infty < y' < +\infty \end{array} \right\}.$$

Среди функций  $y(x) \in C^2[a, b]$ , удовлетворяющих краевым условиям

$$y(a) = y_A, y(b) = y_B, \quad (7.2)$$

требуется найти функцию  $y^*(x)$ , на которой функционал (7.1) достигает экстремума, т.е.

максимума

$$J[y^*(x)] > J[y(x)]$$

или

минимума

$$J[y^*(x)] < J[y(x)],$$

где  $\forall y(x) \neq y^*(x)$ .

Кривая  $AB: y = y^*(x), x \in [a, b]$ , в этом случае называется *экстремалью*.

Для поиска решений этой задачи воспользуемся блестящей идеей Лагранжа. Примечательно, что к какой бы задаче Лагранж не приступал, он всегда находил самое изящное (чисто во французском стиле) решение.

Пусть  $y^*(x)$  – экстремаль для функционала (7.1), а  $\delta y(x)$  – зафиксированная произвольная вариация, т.е. непрерывно-дифференцируемая функция, удовлетворяющая нулевым краевым условиям

$$\delta y(a) = \delta y(b) = 0. \quad (7.3)$$

Вариацию  $\delta y(x)$  будем добавлять к функции  $y^*(x)$ , чтобы получить множество функций  $y(x)$ , отличных от функции  $y^*(x)$ .

Итак, рассмотрим множество функций

$$y(x) = y^*(x) + t \cdot \delta y(x), \quad (7.4)$$

где параметр  $t$  изменяется так, что  $|t| < 1$ .

Геометрически множество функций  $y(x)$  представить так:

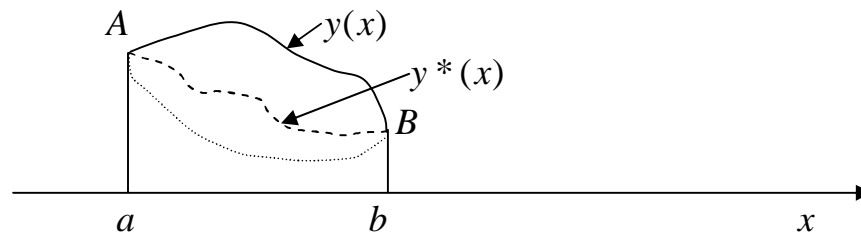


Рис. 7.2

Если в функционал (7.1) вставить  $y(x)$  в виде (7.4), то он превращается в функцию  $\varphi(t)$ :

$$J[y(x)] = J[y^*(x) + t \cdot \delta y(x)] = \varphi(t),$$

которая достигает экстремума при  $t=0$ . Поэтому  $\varphi'(0) = 0$ .

Найдем  $\varphi'(0)$ :

$$\begin{aligned} \varphi'(t)|_{t=0} &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} F(x, y^* + t \cdot \delta y, y^* + t \cdot \delta y') dx \Big|_{t=0} = \\ &= \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx \Big|_{t=0} = 0 \end{aligned} \quad (7.5)$$

В выражении (7.5) преобразуем второе слагаемое:

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' dx &= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} dy' dx \Big|_{t=0} \quad \left. \begin{array}{l} \text{интегрируем по частям} \\ u = \frac{\partial F}{\partial y'}, dv = dy'(x) dx \\ du = \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) dx, v = dy(x) \end{array} \right\} = \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot dy(x) \Big|_a^b - \\ - \int_a^b \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) dy dx &\stackrel{(7.3)}{=} 0 - \int_a^b \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) dy dx = - \int_a^b \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) dy dx. \end{aligned}$$

Итак, второе слагаемое в (7.5) имеет вид

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' dx = - \int_a^b \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \cdot \delta y dx,$$

а формулу (7.5) можно переписать так:

$$\int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right) \delta y(x) dx = 0. \quad (7.6)$$

Заметим, что (7.6) должно выполняться для *любой* функции  $\delta y(x)$ . Каков же тогда множитель  $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right)$ ? Ответ на этот вопрос дает *лемма*, доказанная

Эйлером:

**Лемма 7.1 (Эйлера).** Если интеграл

$$\int_a^b \Phi(x) \cdot \delta y(x) dx = 0$$

равен нулю для любой функции  $\delta y(x)$ , то функция  $\Phi(x)$  непременно должна быть тождественно равна нулю:

$$\Phi(x) \equiv 0 \text{ для } \forall x \in [a, b].$$

Итак, согласно лемме Эйлера, экстремальная кривая  $y = y^*(x)$  должна удовлетворять уравнению Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0. \quad (7.7)$$

Таким образом, решение простейшей задачи вариационного исчисления свелось к решению уравнения (7.7) Эйлера при краевых условиях (7.2). Заметим, что Эйлер пришел к уравнению (7.7) первым, но путь его решения был более сложным. Поэтому уравнение (7.7) называется *уравнением Эйлера-Лагранжа*.

А теперь обратимся к примерам.

**п°1.** Найти экстремаль функционала

$$J[y(x)] = \int_0^1 (y'^2 - 12xy) dx$$

при краевых условиях  $y(0) = 0, y(1) = 1$ .

Δ Приступая к решению нашей задачи, замечаем, что

$$F = y'^2 - 12xy, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -12x, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y', \quad \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 2y''.$$

Поэтому уравнение Эйлера-Лагранжа (7.7) здесь выглядит так:

$$2y'' - 12x = 0 \text{ или } y'' = 6x.$$

Интегрируя его, находим общее решение:  $y(x) = x^3 + c_1x + c_2$ . Выделим теперь интересующее нас частное решение, потребовав, чтобы выполнялись краевые условия:

$$\begin{cases} y(0) = c_2 = 0, \\ y(1) = 1 + c_1 + c_2 = 1. \end{cases}$$

Из последней системы находим:  $c_1 = 0, c_2 = 0$ . Следовательно,  $y = x^3$  – иско-мая экстремаль. ▲

**п°2.** Найти экстремаль функционала

$$J[y(x)] = \int_1^2 (2x - y^2) dx$$

при краевых условиях  $y(1) = 1, y(2) = 3$ .

Δ Здесь  $F = 2x - y^2, \frac{\partial F}{\partial y} = -2y, \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$ . Поэтому уравнение Эйлера-Лагранжа

имеет вид

$$-2y = 0 \text{ или } y = 0$$

и задает единственную экстремаль данного функционала, которая не удовлетворяет данным краевым условиям. Следовательно, у исходной задачи нет гладкого решения. ▲

Отметим теперь некоторые частные случаи уравнения Эйлера-Лагранжа.

**I случай.** Пусть функция  $F = F(x, y)$  не зависит от  $y'$ . Тогда уравнение Эйлера-Лагранжа выглядит так:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

или

$$\psi(x, y) = 0. \quad (7.8)$$

Уравнение (7.8) определяет некоторую кривую, которая будет единственной экстремалью для данного функционала (7.1). Для произвольных краевых условий (7.2) непрерывного решения, вообще говоря, нет.

**II случай.** Пусть  $F = F(y')$  не зависит ни от  $x$ , ни от  $y$ . Тогда (7.7) имеет вид:

$$y'' = 0.$$

Из общего решения  $y = c_1 x + c_2$  находится единственное решение при краевых условиях (7.2).

**III случай.** Пусть  $F = F(x, y')$  не зависит от  $y$ . Тогда уравнение (7.7)

$$-\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0$$

имеет промежуточный интеграл  $\frac{\partial F}{\partial y'} = c_1$ .

**IV случай.** Пусть  $F = F(y, y')$  не зависит от  $x$ . Распишем подробнее уравнение (7.7).

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' = 0. \quad (7.9)$$

Покажем, что уравнение (7.9) имеет первый интеграл

$$F(y, y') - y' \frac{\partial F(y, y')}{\partial y'} = c_1. \quad (7.10)$$

Действительно, продифференцировав (7.10) по  $x$ , получим:

$$\frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' - y'' \frac{\partial F}{\partial y'} - y' \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' \right) = 0$$

или

$$\left( \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' \right) y' = 0$$

Если последнее уравнение сократить на  $y'$ , то получим в точности уравнение (7.9). ▲

**п°3.** Обратимся теперь к задаче Бернулли о брахистохроне.

Дан функционал

$$T[y(x)] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{a=0}^{b=1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx$$

и краевые условия  $y(a) = y_A$ ,  $y(b) = y_B$ . Надо найти экстремаль.

Δ Приступая к обсуждению поиска решения этой задачи, замечаем, что подинтегральная функция здесь не зависит от  $x$ , т.е. мы находимся в условиях IV случая. Поэтому должны воспользоваться формулой (7.10). Найдем

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{y} \sqrt{1+y'^2}},$$

тогда

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y} \sqrt{1+y'^2}} = c_1.$$

Упрощая левую часть последнего выражения, получаем

$$\frac{1}{\sqrt{y} \sqrt{1+y'^2}} = c_1$$

или

$$y(1+y'^2) = \tilde{c}_1. \quad (7.11)$$

Попробуем решить уравнение (7.11), введя замену

$$y' = \operatorname{ctg} t. \quad (7.12)$$

Тогда из уравнения (7.11)

$$y = \frac{\tilde{c}_1}{1+y'^2} = \frac{\tilde{c}_1}{1+\operatorname{ctg}^2 t} = \tilde{c}_1 \sin^2 t$$

или

$$y = \frac{\tilde{c}_1}{2} (1 - \cos 2t)$$

Мы нашли  $y$  как функцию от  $t$ . Теперь нам надо отыскать  $x$  как функцию от параметра  $t$ . Из (7.12) следует, что

$$dx = \frac{dy}{\operatorname{ctg} t} = \frac{\tilde{c}_1 \sin 2t dt}{\operatorname{ctg} t} = \frac{2 \tilde{c}_1 \sin t \cos t dt}{\frac{\cos t}{\sin t}} = 2 \tilde{c}_1 \sin^2 t dt$$

или

$$dx = \tilde{c}_1 (1 - \cos 2t) dt.$$

Отсюда, интегрируя по  $t$ , будем иметь

$$x = \tilde{c}_1 \left( t - \frac{\sin 2t}{2} \right) + \tilde{c}_2$$

или

$$x = \frac{\tilde{c}_1}{2} (2t - \sin 2t) + \tilde{c}_2.$$

Полагая теперь  $2t = \varphi$ , получим

$$\begin{cases} x = \frac{\tilde{c}_1}{2} (\varphi - \sin \varphi) + \tilde{c}_2, \\ y = \frac{\tilde{c}_1}{2} (1 - \cos \varphi). \end{cases} \quad (7.13)$$

Система (7.13) задает кривую, называемую *циклоидой*.

Заметим, что японцы, китайцы, вьетнамцы испокон веков строят крыши так, что их профиль есть циклоиды, с которых быстрее всего стекает вода (рис. 7.3).

Несколько слов о том, что такое циклоида. Возьмем окружность радиуса  $R$ . Пусть она касается в начале координат оси  $Ox$ .

Будем теперь катить окружность как колесо вдоль оси  $Ox$  без скольжения и наблюдать при этом за отмеченной точкой. Эта точка и

опишет циклоиду (рис. 7.4). Для решения задачи о брахистохроне нам придется

циклоиду зеркально отобразить относительно оси  $Ox$  и взять какой-то ее кусок  $AB$ .

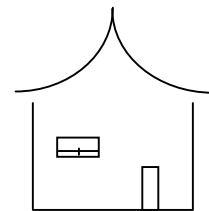


Рис. 7.3

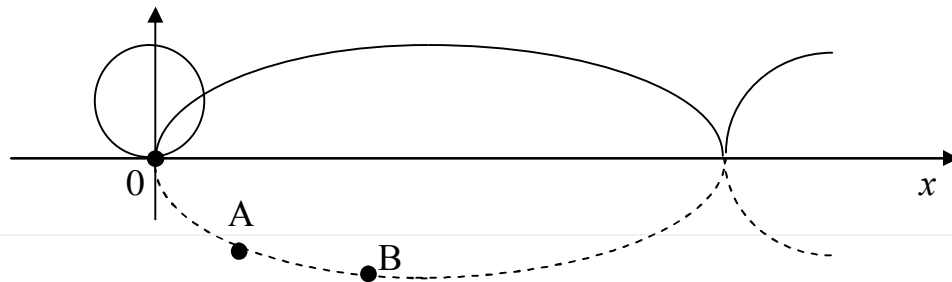


Рис. 7.4

Мы не будем останавливаться на поисках значений постоянных  $c_1$  и  $c_2$ , при которых кривая (7.13) удовлетворяет крайним условиям  $y(a) = y_A$ ,  $y(b) = y_B$ . ▲

**п°4.** (Задача о минимальной площади поверхности вращения).

Определить вид кривой

$$y = y^*(x), x \in [a, b],$$

при вращении которой вокруг оси  $Ox$  образуется поверхность минимальной площади.

Δ Приступая к решению этой задачи, рассмотрим вначале элементарную площадь поверхности на участке  $[x, x + dx]$  оси  $Ox$ . Это усеченный конус.

$$ds(x) = 2\pi y dl = 2\pi y \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Здесь  $dl$  – длина дуги кривой  $AB$  над участком  $[x, x + dx]$ .

Тогда вся площадь поверхности получается как интеграл

$$S[y(x)] = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Краевые условия имеют вид  $y(a) = y_A, y(b) = y_B$ .

Здесь подынтегральная функция  $F(y, y')$  не зависит от  $x$ . Поэтому воспользуемся выражением

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = c_1.$$

В нашем случае оно выглядит так:

$$y \sqrt{1 + y'^2} + y' \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c_1$$

или, после упрощения,

$$y = c_1 \sqrt{1 + y'^2}. \quad (7.14)$$

(7.14) – это дифференциальное уравнение первого порядка, неразрешенное относительно производной. Чтобы разобраться, каковы здесь интегральные кривые, введем замену  $y' = \text{sh } t$ . Тогда

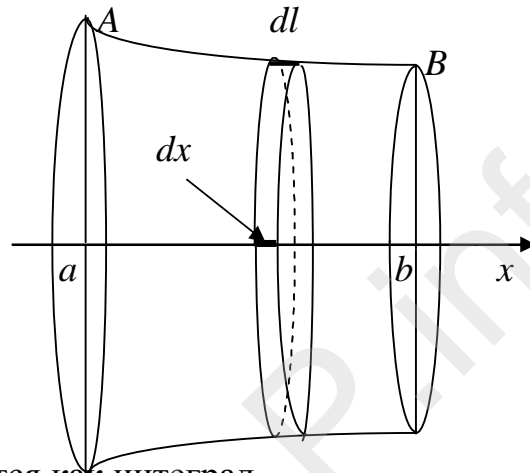
$$1 + y'^2 = \text{ch}^2 t, \quad y = c_1 \text{ch } t, \quad dx = \frac{dy}{\text{sh } t} = |dy = y' dx| = \frac{c_1 \text{sh } t dt}{\text{sh } t} = c_1 dt, \quad x = c_1 t + c_2.$$

Поэтому

$$\begin{cases} x = c_1 t + c_2 \\ y = c_1 \text{sh } t \end{cases}$$

– параметрические уравнения семейства интегральных кривых. Исключая параметр  $t$ , получаем семейство цепных линий

$$y = c_1 \text{sh} \frac{x - c_2}{c_1}$$





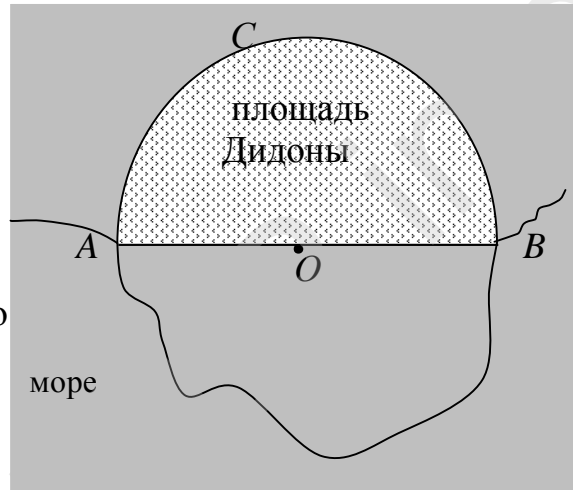
*Цепная линия* – это линия, по которой прогибается цепь, натянутая на точки  $A$  и  $B$ , по действию силы тяжести. Поверхность, получаемая вращением цепной линии вокруг оси  $Ox$ , называется *катеноидом*.

п°5. Дано:  $J[y(x)] = \int_a^b (y^2 - 2xy) dx$ ,  $y(a) = y_A$ ,  $y(b) = y_B$ . Найти экстремаль.

Δ Замечаем, что  $F = y^2 - 2xy$  не зависит от  $y'$  и потому уравнение Эйлера-Лагранжа

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y - 2x = 0$$

имеет единственную экстремаль  $y = x$ . Так что в общем случае непрерывного решения, удовлетворяющего произвольным краевым условиям, вообще говоря, нет. ▲



п°6. (Изопериметрическая задача Дидоны).

Существует легенда, согласно которой Дидона – финикийская царица, – спасаясь от преследователей, на корабле приплыла в Северную Африку и попросила у местного царя кусок земли, который можно «окружить бычьей шкурой». Царь, восхищенный молодостью и красотой Дидоны, немедленно дал согласие. Каково же было его удивление, когда Дидона у него на глазах разрешила шкуру вола на тесемки, связала их в длинную веревку, а потом, выбрав берег с большим полуостровом, отмерила  $2/3$  своей веревки расстояние между точками  $A$  и  $B$ , нашла середину  $O$  отрезка  $AB$  и  $1/3$  веревки как радиусом описала полуокружность с центром в точке  $O$ . Разложив свою веревку, Дидона отхватила у местного царя довольно большой кусок земли. Сначала она основала здесь крепость для себя, а потом на этом месте был построен город Карфаген (об этом можно прочитать в «Энеиде» римского поэта Публия Вергилия Мероне).

Рассмотрим общую задачу.

Дан функционал

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y') dx, \quad (7.15)$$

рассматриваемый на кривых  $AB$ :  $y = y(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , и краевые условия

$$y(a) = y_A, y(b) = y_B. \quad (7.16)$$

Требуется найти экстремаль для функционала (7.15) такую, чтобы наряду с условиями (7.16) выполнялось дополнительное условие

$$G[y(x)] = \int_a^b G(x, y(x), y'(x)) dx = l = \text{const},$$

называемое *изопериметрическим*.

Эта задача была поставлена Эйлером. Ж.Л. Лагранж дал для нее следующую изящную схему решения.

1 шаг. Составляем вспомогательную функцию Лагранжа:

$$L = F + \lambda G,$$

здесь  $\lambda$  – число, подлежащее определению.

2 шаг. Находим экстремали для уравнения Эйлера-Лагранжа, определяемого функцией  $L$ :

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0,$$

которые удовлетворяют краевым условиям (7.16).

Это и будет решением данной изопериметрической вариационной задачи.

Обратимся теперь к задаче Дидоны. На математическом языке эту задачу

можно сформулировать так: найти максимум площади  $S = \int_{-a}^a y(x) dx$ , ограниченной осью абсцисс и графиком функции  $y = y(x)$ ,  $x \in [-a, a]$ . Точкам  $A$  и  $B$  оси  $Ox$  соответствуют координаты  $-a$  и  $a$ . Функция  $y(x)$  должна быть такой, что:

1) ее график  $AB$  проходит через точки  $A$  и  $B$ , т.е. выполняются краевые условия  $y(-a) = y(a) = 0$ ;

2) длина  $AB$  ограничена числом  $l = \pi a \approx 3a$ , т.е. функционал

$$G[y(x)] = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx = \pi a.$$

Приступая к решению задачи Дидоны по схеме Лагранжа, составляем функцию Лагранжа:

$$L = F + \lambda G = y + \lambda \sqrt{1 + y'^2}.$$

Замечаем, что  $L$  не зависит от  $x$ , поэтому для нее вместо уравнения Эйлера-Лагранжа выписываем первый интеграл

$$\begin{aligned} L - y' \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) &= c_1 \Leftrightarrow y - y' \lambda \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = c_1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y = c_1 + \frac{\lambda}{\sqrt{1 + y'^2}}. \end{aligned} \quad (7.17)$$

(7.17) – это дифференциальное уравнение первого порядка, не разрешенное относительно производной  $y'$ . Поэтому решение ищем в параметрическом виде:  $y' = \operatorname{tg} \varphi$ . Тогда

$$\begin{aligned} y = c_1 - l \cos j &\Rightarrow y' = l \sin j \frac{dj}{dx}; \operatorname{tg} j = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dx = \frac{dy}{\operatorname{tg} j} \Rightarrow \\ &\Rightarrow dx = l \cos j dj \Rightarrow x = c_2 + l \sin j. \end{aligned}$$

Но  $\begin{cases} y = c_1 - \lambda \cos \varphi \\ x = c_2 + \lambda \sin \varphi \end{cases}$  – это параметрические уравнения окружности  $(x - c_2)^2 + (y - c_1)^2 = \lambda^2$ . При наших краевых условиях получим

$$x^2 + y^2 = a^2$$

– уравнение окружности Дидоны. ▲

### Задачи для самостоятельного решения

**Задача 1.** Найти допустимые экстремали функционала

$$J(x) = \int_0^1 (12tx + x \dot{x} + (\dot{x})^2) dt \text{ при условиях } x(0) = 1, x(1) = 4.$$

**Отв.:**  $x = t^3 + 2t + 1$ .

**Задача 2.** Найти экстремали функционала  $J(x) = \int_0^1 e^t \sqrt{1 + \dot{x}^2} dt$ .

**Отв.:**  $x = x(t) = c_2 \arccos(c_1 e^{-t})$ .

**Задача 3.** Среди кривых, соединяющих две точки  $A = (\operatorname{ch} a, x_1)$  и  $B = (\operatorname{ch} b, x_2)$  найти ту, которая при вращении вокруг оси  $t$  образует поверхность наименьшей площади. **Отв.:**  $x = \operatorname{ch} t$ .

**Задача 4.** Найти экстремали функционала:

$$J(x) = \int_0^1 (x + 2x \dot{x} + (\dot{x})^2) dt, x(0) = 0, x(1) = 0;$$

**Отв.:**  $x = 0$ .

**Задача 5.** Найти кривую, которая проходит через точки  $A(0,1)$  и  $B(1,0)$  и ми-

нимизирует функционал  $J(x) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 + \dot{x}^2}}{x} dt$ .

## § 8. Приложения матриц к системам связи

Часто возникает необходимость использования матриц, разбитых (разложенных) на прямоугольные части или блоки. Например,  $m \times n$ -матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{K} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{K} & a_{2n} \\ \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} \\ a_{m1} & a_{m2} & \mathbf{K} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

можно разбить на 4 блока следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{K} & a_{1k} & a_{1k+1} & \mathbf{K} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{K} & a_{2k} & a_{2k+1} & \mathbf{K} & a_{2n} \\ \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} \\ a_{l1} & a_{l2} & \mathbf{K} & a_{lk} & a_{lk+1} & \mathbf{K} & a_{ln} \\ \hline a_{l+11} & a_{l+22} & \mathbf{K} & a_{l+kn} & a_{l+1k+1} & \mathbf{K} & a_{l+1n} \\ \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} \\ a_{m1} & a_{m2} & \mathbf{K} & a_{mk} & a_{mk+1} & \mathbf{K} & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

где матрицы-блоки

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \mathbf{K} & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \mathbf{K} & a_{2k} \\ \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} \\ a_{l1} & a_{l2} & \mathbf{K} & a_{lk} \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} a_{1k+1} & \mathbf{K} & a_{1n} \\ a_{2k+1} & \mathbf{K} & a_{2n} \\ \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} \\ a_{lk+1} & \mathbf{K} & a_{ln} \end{pmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} a_{l+11} & a_{l+22} & \mathbf{K} & a_{l+kn} \\ \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} \\ a_{m1} & a_{m2} & \mathbf{K} & a_{mk} \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} a_{l+1k+1} & \mathbf{K} & a_{l+1n} \\ \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} \\ a_{mk+1} & \mathbf{K} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

имеют соответственно размерности  $l \times k, l \times (n - k), (m - l) \times k, (m - l) \times (n - k)$ .

Таким образом, с помощью горизонтальных и вертикальных линий  $m \times n$ -матрицу  $A$  можно расщепить на прямоугольные блоки.

Действия над блочными матрицами производятся по тем же формальным правилам, что и в случае матриц с числовыми элементами. При этом, естественно, при сложении матриц  $A = (A_{ij})$  и  $B = (B_{ij})$  матрицы  $A$  и  $B$  и соответствующие блоки  $A_{ij}$  и  $B_{ij}$  должны быть одинаковой размерности. При проведении операции умножения  $AB = C = (C_{ij})$  матриц

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \mathbf{K} & A_{1l} \\ \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} \\ A_{k1} & A_{k2} & \mathbf{K} & A_{kl} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} B_{11} & \mathbf{K} & B_{1p} \\ \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} \\ B_{l1} & \mathbf{K} & B_{lp} \end{pmatrix}$$

необходимо, чтобы блоки  $A_{ik}$  и  $B_{ki}$  были согласованными. Тогда

$$AB = C = (C_{ij}) = \left( \sum_{k=1}^l a_{ik} b_{kj} \right).$$

**Многочлен от матрицы.** Пусть  $A$  –  $n \times n$ -матрица с постоянными коэффициентами, а

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = P_n(\lambda)$$

– некоторый многочлен. Тогда

$$P_n(A) = a_0A^n + a_1A^{n-1} + \dots + a_{n-1}A + a_nE,$$

где  $E$  – единичная матрица, называется *многочленом от матрицы  $A$* . Всякая  $n \times n$ -матрица  $A$  называется *корнем многочлена  $P_n(\lambda)$* , если  $P_n(A) = 0$ , где  $0$  – нулевая  $n \times n$ -матрица.

**Теорема 8.1 (Кели-Гамильтона).** Всякая матрица является корнем своего характеристического многочлена.

Δ Пусть  $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = |\lambda E - A|$ . При построении обратной матрицы  $A^{-1}$  находится так называемая *присоединенная* или *союзная* матрица  $B$ ,  $(i, j)$ -ый элемент которой равен алгебраическому дополнению элемента  $(a_{ji})$ , причем матрица  $B$  удовлетворяет условию  $AB = |A|E$ . Это соотношение верно для любой матрицы, а, следовательно, и для матрицы  $(\lambda E - A)$ . Присоединенной для матрицы  $(\lambda E - A)$  является матрица  $B(\lambda)$ , каждый элемент которой есть многочлен степени не выше  $n - 1$ , так как он является минором  $(n - 1)$ -го порядка матрицы  $(\lambda E - A)$ , т.е. имеет вид

$$B(\lambda) = B_{n-1}\lambda^{n-1} + B_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + B_1\lambda + B_0,$$

где  $B_i$  – матрицы  $n$ -го порядка с постоянными элементами. Тогда

$$(\lambda E - A)B(\lambda) = |\lambda E - A|E,$$

или в подробной записи

$$\begin{aligned} (\lambda E - A)(B_{n-1}\lambda^{n-1} + B_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + B_1\lambda + B_0) &= \lambda^n B_{n-1} + \lambda^{n-1}(B_{n-2} - AB_{n-1}) + \\ &+ \lambda^{n-2}(B_{n-3} - AB_{n-2}) + (-AB) = (\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n)E. \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\lambda$ , получим равенства

$$B_{n-1} = E,$$

$$B_{n-2} - AB_{n-1} = a_1E,$$

$$B_{n-3} - AB_{n-2} = a_2E,$$

$$\mathbf{KKKKKKKK}$$

$$-AB = a_nE.$$

Умножая эти равенства последовательно на  $A^n, A^{n-1}, \dots, E$ , и складывая, будем иметь

$$0 = A^n + a_1A^{n-1} + \dots + a_{n-1}A + a_nE. \quad \blacktriangle$$

**Передача дискретной информации.** *Сообщение* – это последовательность дискретных символов  $(s_1, s_2, \dots, s_r)$ , выбираемых из конечного алфавита  $(s_1, s_2, \dots, s_k)$  с вероятностями  $p_1, p_2, \dots, p_k, p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$ . Так что источ-

ник информации уподобляется случайной величине  $S$ , принимающей значения  $s_j$  с вероятностями  $p_j, j = 1, 2, \dots, k$ .

При кодировании каждый символ источника заменяется последовательностью букв некоторого другого алфавита  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , каждая из которых предназначена для непосредственной передачи информации по линии связи. Очевидно, что каждой  $x_j$  можно приписать некоторую вероятность  $\pi_j$ .

Последовательность букв, соответствующая некоторому символу источника, называется *кодовым словом*. При декодировании осуществляется обратная операция с целью восстановления информации.

Для правильной передачи информации необходимо, чтобы значения физического явления, соответствующие буквам алфавита, отличались достаточно хорошо одно от другого, иначе увеличивается риск получить искаженное сообщение. Колебание сигнала вокруг его среднего значения вызывается «шумом», который можно охарактеризовать вероятностью смещения двух разных букв алфавита.

Пусть на вход линии подается  $r$ -выборка  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_r)$ , а на выходе принимается  $r$ -выборка  $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_j, \dots, \beta_r)$  выходного алфавита. Линия характеризуется множеством вероятностей перехода, т.е. вероятностей того, что поданная на вход  $r$ -выборка  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_r)$  принимается на выходе как  $r$ -выборка  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_j, \dots, \beta_r)$ . Это условная вероятность

$$p(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_j, \dots, \beta_r | \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_r)$$

того, что на выходе принята выборка  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_j, \dots, \beta_r)$ , если на вход подавалась выборка  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_r)$ .

В этом случае говорят о *линии передачи с памятью*, в противном случае речь идет о *линии передач без памяти*.

В общем случае линия характеризуется случайной величиной  $X$  на входе, принимающей значение  $x_i, i = 1, 2, \dots, n$ , с вероятностями  $p_i$ , случайной величиной  $Y$  на выходе, принимающей значения  $y_j$  с вероятностями  $\pi_j, j = 1, 2, \dots, n$ , и матрицей перехода  $\Pi$ , составленной из условных вероятностей

$$p_{ij} = p(Y = y_j | X = x_i).$$

Отсюда по формуле полной вероятности находим, что

$$(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m) = (p_1, p_2, \dots, p_m) \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \mathbf{K} & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \mathbf{K} & p_{2m} \\ \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} \\ p_{n1} & p_{n2} & \mathbf{K} & p_{nm} \end{pmatrix}. \quad (8.1)$$

Тогда по формуле Байеса можно вычислить условную вероятность

$$\pi_{ij} = p(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P_{ij}}{\sum_{i=1}^n P_i P_{ij}}. \quad (8.2)$$

**п°1.** Рассмотрим двоичную симметрическую линию, описываемую соотношением

$$X \in \{x_1 = 0, x_2 = 1\}, \quad Y \in \{y_1 = 0, y_2 = 1\},$$

т.е. на вход  $X$  и выход  $Y$  посылаются два значения 0 и 1 с вероятностями перехода

$$p_{00} = p(Y = 0 | X = 0) = p, \quad p_{01} = p(Y = 1 | X = 0) = 1 - p,$$

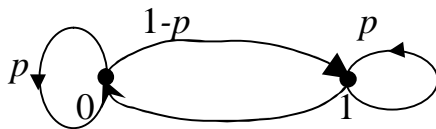
$$p_{10} = p(Y = 0 | X = 1) = 1 - p, \quad p_{11} = p(Y = 1 | X = 1) = p.$$

Матрица перехода  $\Pi$  имеет вид

$$\Pi = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}. \quad (8.3)$$

Граф перехода изображен на рис 8.1а, а сама линия перехода – на рис 8.1б.

а)



б)

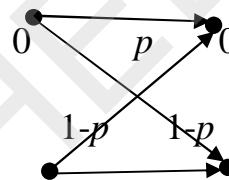


Рис. 8.1

Основной проблемой при передаче информации является ограничение действия шума на линии. Очевидно, что влияние шума будет тем меньше, чем больше вероятности  $\pi_{ij}$ , которые вычисляются по формуле (8.2). Практически задача сводится к тому, чтобы определить правило принятия решения, по которому, наблюдая  $r$ -выборку на выходе, можно было бы принять ее или отвергнуть в зависимости от того, подвергалось ли сообщение изменению в процессе передачи. Другими словами, надо найти правило, которое позволяло бы обнаруживать ошибки и дало бы возможность их исправлять. Вероятность  $p$ , характеризующая шум на линии, обозначается  $p(l)$ .

**п°2.** Пусть линия передачи определяется случайной величиной  $X$  на входе, принимающей значения  $x_1, x_2, x_3, x_4$  с вероятностями

$$p(X = x_1) = 0.1, \quad p(X = x_2) = 0.2,$$

$$p(X = x_3) = 0.3, \quad p(X = x_4) = 0.4.$$

Пусть число значений  $y_j$  случайной величины  $Y$  на выходе равно трем, а матрица  $\Pi$  имеет вид

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0.50 & 0 & 0.50 \\ 0.20 & 0.40 & 0.40 \\ 0.50 & 0.25 & 0.25 \\ 0 & 0.50 & 0.50 \end{pmatrix}.$$

Вычислим вероятности  $\pi_j = p(Y = y_j)$ ,  $j = 1, 2, 3$ , по формуле (8.1):

$$(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = \left( \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{4}{10} \right) \begin{pmatrix} 0.50 & 0 & 0.50 \\ 0.20 & 0.40 & 0.40 \\ 0.50 & 0.25 & 0.25 \\ 0 & 0.50 & 0.50 \end{pmatrix} = (0.24; 0.355; 0.405),$$

т.е.  $\pi_1 = p(y = y_1) = 0.24$ ,  $\pi_2 = p(y = y_2) = 0.355$ ,  $\pi_3 = p(y = y_3) = 0.405$ .

**Расстояние Хэмминга.** Пусть получен код, в котором каждая  $r$ -выборка закодирована словом, состоящим из  $n$  символов. Предполагается, что символы взяты из конечного множества, обладающего тем свойством, что символы можно складывать и перемножать (по определенным законам).

Расстояние Хэмминга – это расстояние между двумя кодовыми словами. Оно определяется как число мест, в которых символы этих слов не совпадают.

**п°3.** Пусть кодовые слова  $c_i$  и  $c_j$  имеют вид (в двоичном коде  $\{0,1\}$ ):

$$c_i = (1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1), \quad c_j = (0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0).$$

Для них расстояние Хэмминга  $d(c_i, c_j) = 7$ .

Расстояние Хэмминга тесно связано с вероятностью ошибки при передаче информации или сообщения. Действительно, пусть передано слово  $\alpha_i$ , которое принято как  $\beta_j$ , причем расстояние Хэмминга  $d(\alpha_i, \beta_j) = \delta$ . Тогда условная вероятность

$$p(\alpha_i | \beta_j) = p^\delta (1 - p)^{n - \delta}. \quad (8.4)$$

В самом деле, при передаче символа из двоичной симметрической линии (матрица перехода (8.3)) вероятность ошибки равна  $p$ , а по линии передано  $n - \delta$  символов правильно, а  $\delta$  символов неверно. В силу независимости передачи символов вероятность ошибки при передаче сообщения выражается формулой (8.4).

Так как на практике вероятность  $p$  всегда меньше 0.5 (если линия делает больше 50% ошибок, то вряд ли такой линией стоит пользоваться), то  $p(\alpha_i | \beta_j)$  увеличивается, когда  $\delta$  уменьшается.

Отсюда получается следующее правило: при получении на выходе кодового слова  $\beta_j$  следует в качестве кодового слова на

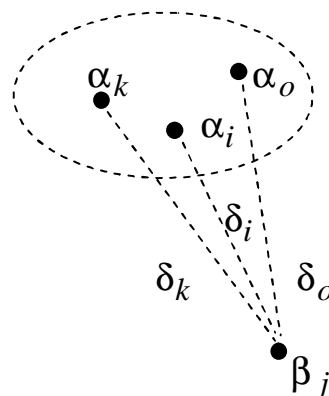


Рис.8.2

входе брать слово с наименьшим расстоянием от  $\beta_j$  (рис. 8.2). Если  $\delta_i < \delta_o$  и  $\delta_i < \delta_k$ , то сигнал подается по линии  $\delta_i$ .

Легко проверить, что расстояние Хэмминга удовлетворяет всем обычным аксиомам функции расстояния:



а)  $d(c_i, c_j) \geq 0$ , причем равенство  $d(c_i, c_j) = 0$  выполняется тогда и только тогда, когда  $c_i = c_j$ ;

б)  $d(c_i, c_j) = d(c_j, c_i)$ ;

в) неравенство треугольника  $d(c_i, c_j) \leq d(c_i, c_k) + d(c_k, c_j)$ .

**Двоичные линейные коды.** Пусть  $e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  –  $n$ -вектор, все координаты которого, кроме  $i$ -ой, равны нулю, а  $i$ -ая координата равна единице. Как известно, эти векторы в совокупности линейно независимы и образуют базис линейного пространства  $\mathbf{R}^n$ . В композиции они составляют единичную матрицу  $E$ :

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathbf{K} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{K} & 0 & 0 \\ \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{K} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{K} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть вектор ( $n$ -выборка)

$$a^i = (a_1, a_2, \dots, a_n),$$

где  $a_i$  – элементы поля алфавита. Матрицей  $E$  он преобразуется в вектор

$$a^i E = (a_1, a_2, \dots, a_n),$$

т.е. преобразование с матрицей  $E$  не искажает входной сигнал. Если взять другие  $n$  линейно независимых векторов и записать их как строки, то при умножении вектора  $a$  на матрицу  $M$  с этими строками, в общем случае  $aM \neq a$ . Поскольку строки матрицы  $M$  независимы, то матрица  $M$  невырожденная и, следовательно, умножением на соответствующий  $a^j$  ( $a^i M = a^j \Leftrightarrow a^i = a^j M^{-1}$ ) получают все векторы из  $\mathbf{R}^n$ .

Точно так же можно определить матрицу  $M$ , строки которой представляют собой  $m$  линейно независимых векторов (их ранг равен  $m$ ). С помощью этой матрицы можно получить все векторы пространства  $\mathbf{R}^m$ , элементами которого являются все выборки поля векторов  $a^i = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ .

Напомним, что элементарные операции над матрицами (перестановка строк местами; умножение любой строки матрицы на ненулевой элемент; прибавление к строке матрицы другой строки, умноженной на элемент поля чисел) не меняют ранга матрицы и с их помощью любую  $m \times n$ -матрицу ранга  $m$  можно привести к следующему каноническому виду:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{K} & 0 & a_{1m+1} & \mathbf{K} & a_{1n} \\ 0 & 1 & \mathbf{K} & 0 & a_{2m+1} & \mathbf{K} & a_{2n} \\ \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} & \mathbf{K} \\ 0 & 0 & \mathbf{K} & 1 & a_{mm+1} & \mathbf{K} & a_{mn} \end{pmatrix} = (E\mathbf{M}).$$



$$BH^T = (HB^T)^T = 0. \quad (8.6)$$

В самом деле, записывая сомножители с помощью блоков, получаем

$$(E_{m \times m} \mathbf{M}) \begin{pmatrix} -A \\ \mathbf{K} \mathbf{K} \\ E_{k \times k} \end{pmatrix} = (-A) - (A) = 0.$$

Пространство, порожденное векторами-строками матрицы  $B$ , называется *нулевым пространством* матрицы  $H$ , и наоборот. Если  $v$  –  $n$ -мерный вектор, полученный из  $m$ -выборки  $a$  с помощью матрицы  $B$ , т.е.

$$v = aB,$$

то в силу равенства (8.6) имеем

$$vH^T = aBH^T = 0. \quad (8.7)$$

Таким образом,  $H^T$  переводит в нулевой вектор любой вектор  $v$  из  $\mathbf{R}^m$ . Транспонируя равенство (8.7):

$$Hv^T = 0^T, \quad (8.8)$$

где  $v^T$  и  $0^T$  –  $k$ -векторы-столбцы. Уравнение (8.8) представляет собой систему  $k$  линейных однородных уравнений с неизвестными  $v_1, v_2, \dots, v_k$ . Векторы  $v = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ , координаты которых являются символами кодовых слов на контрольных листах, – это решение системы (8.8). Ввиду этого матрица  $H$  называется *проверочной матрицей*.

**Обнаружение ошибок.** Для вектора  $v$  из подпространства  $\mathbf{R}^m$ , порожденного строками матрицы  $B$ , имеет место равенство (8.8). Если теперь на выходе получается некоторый  $n$ -мерный вектор  $w$ , для которого выполнено соотношение

$$Hw^T \neq 0,$$

то  $w$  не принадлежит  $\mathbf{R}^m$  и, следовательно, обнаружена ошибка. Заметим, что, очевидно, при выполнении равенства (8.8) можно лишь утверждать, что при передаче по линии не произошло ошибки какого-то определенного типа, но нет гарантии, что отсутствуют ошибки других типов.

В самом деле, вектор

$$z = Hw^T$$

имеет  $k$  координат и поэтому не дает возможности выявить больше, чем  $p^k - 1$  типов ошибок, где  $p$  – число элементов поля. Поэтому необходимо с самого начала установить, какие ошибки желательно обнаруживать. В частности, в двухкодовом поле  $\{0,1\}$  можно выявить не более  $2^k - 1$  типов ошибок.

## § 9. Эйлеровы функции $\Gamma(x)$ и $B(x, y)$

**Гамма функция  $\Gamma(x)$ .** Интегральное представление *гамма-функции*  $\Gamma(x)$  определяется равенством

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, x > 0. \quad (9.1)$$

Этот интеграл сходится при  $x > 0$ , так как при  $t \rightarrow \infty$  он сходится из-за наличия множителя  $e^{-t}$ , а при  $t \rightarrow 0$  выполняется  $|e^{-t} t^{x-1}| \sim t^{x-1}$ . Отсюда следует, что интеграл (9.1) существует при  $x - 1 > -1$ , т.е. при  $x > 0$ .

Производная  $\Gamma$ -функции (9.1)

$$\Gamma'(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} \ln t dt, x > 0.$$

Аналогично получаем

$$\Gamma''(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} (\ln t)^2 dt > 0.$$

Отсюда следует, что гамма-функция является выпуклой функцией, имеющей единственный положительный минимум (рис. 9.1).

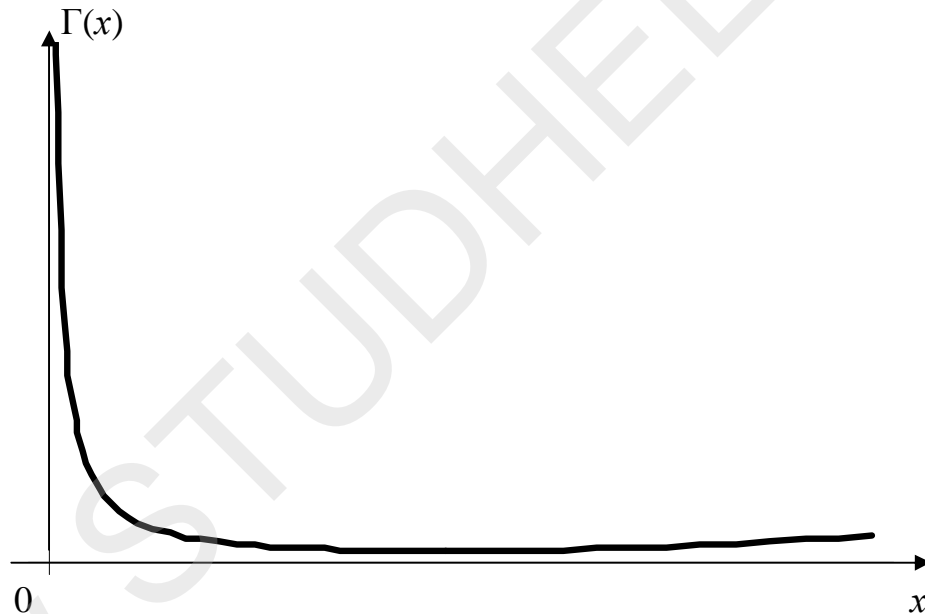


Рис. 9.1

п°1. а)  $\Gamma(1) = \int_0^1 e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^1 = 1;$

б)  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 e^{-t} t^{-1/2} dt = \int_0^{\infty} e^{-s^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{p},$

так как интеграл Пуассона  $\int_0^{\infty} e^{-s^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

**Формула приведения.** Интегрируя по частям в равенстве (9.1), получаем

$$\Gamma(x+1) = \int_0^1 t^x e^{-t} dt = \left| \begin{array}{l} u = t^x, du = xt^{x-1} dt \\ dv = e^{-t} dt, v = -e^{-t} \end{array} \right| = -t^x e^{-t} \Big|_0^{\infty} + x \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x).$$

Таким образом, имеет место *формула приведения*

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \quad (9.1)$$

При

$$n\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \dots = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!,$$

$$\Gamma(1) = 0! = 1.$$

**Формула дополнения.** При  $0 < x < 1$  справедлива *формула дополнения*

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}. \quad (9.3)$$

Заменив  $x$  на  $x+1$  в формуле (9.3), получим

$$\Gamma(x+1)\Gamma(-x) = \frac{\pi}{\sin \pi(x+1)} = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

Отсюда и из справедливости формулы (9.3) при  $0 < x < 1$  вытекает справедливость равенства (9.3) при любом  $x$ , не являющемся целым числом.

Применяя повторно формулу (9.1), получаем

$$\Gamma(x+n) = (x+n-1)(x+n-2)\dots(x+1)x\Gamma(x).$$

Отсюда при  $x = \frac{1}{2}$  имеем

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(n - \frac{3}{2}\right) \cdot \dots \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}. \quad (9.4)$$

**п°2.** Найти  $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$ .

Δ Имеем, согласно формуле (9.4):

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) &= \Gamma\left(1 + \frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2} \Gamma\left(1 + \frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \\ &= \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{2^3} \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

*Бета-функция*  $B(x, y)$  определяется несобственным интегралом

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad x > 0, y > 0, \quad (9.5)$$

зависящим от двух параметров  $x$  и  $y$ .

Свойства функции  $B(x, y)$ :

1)  $B(x, y)$  – симметричная функция, т.е.  $B(x, y) = B(y, x)$ .

Δ Действительно, положив  $t = 1 - t$ , получим

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \int_0^1 t^{y-1} (1-t)^{x-1} dt = B(y, x). \quad \blacktriangle$$

2) Гамма- и бета-функции связаны соотношением

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (9.6)$$

Δ В самом деле, положим в равенстве (9.5)  $t = \cos^2 t$ . Тогда имеем

$$dt = -2 \cos t \sin t dt, 1-t = 1 - \cos^2 t = \sin^2 t,$$

$$t = 0 \Rightarrow t = \frac{p}{2}, t = 1 \Rightarrow t = 0.$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = -2 \int_{p/2}^0 \cos^{2x-2} t \sin^{2y-2} t \cos t \sin t dt = \\ &= 2 \int_0^{p/2} \cos^{2x-1} t \sin^{2y-1} t dt. \end{aligned} \quad (9.7)$$

В формуле (9.1) положим  $t = u^2, dt = 2u du$  и получим

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{2x-2} e^{-u^2} du = 2 \int_0^\infty u^{2x-1} e^{-u^2} du.$$

Аналогично при  $t = v^2$  имеем

$$\Gamma(y) = 2 \int_0^\infty v^{2y-1} e^{-v^2} dv; \Gamma(x+y) = 2 \int_0^\infty t^{2(x+y)-1} e^{-t^2} dt. \quad (9.8)$$

Отсюда получим, что

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty u^{2x-1} v^{2y-1} e^{-(u^2+v^2)} dudv.$$

Перейдя к полярным координатам  $u = r \cos q, y = r \sin q, 0 \leq r < \infty, 0 \leq q \leq \frac{p}{2}$ ,

получим с учетом формул (9.7) и (9.8):

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= 4 \int_0^{p/2} dq \int_0^\infty r \cdot r^{2x-1} \cos^{2x-1} q \cdot r^{2y-1} \cdot \sin^{2y-1} q e^{-r^2} dr = \\ &= 2 \int_0^{p/2} \cos^{2x-1} q \cdot \sin^{2y-1} q dq \cdot 2 \int_0^\infty r^{2(x+y)-1} e^{-r^2} dr = B(x, y)\Gamma(x+y). \end{aligned}$$

Отсюда и следует формула (9.6).  $\blacktriangle$

Бета- и гамма-функции называются *интегралами Эйлера* первого и второго рода соответственно.

**Применение интегралов Эйлера к вычислению определенных интегралов.** Из формул (9.6) и (9.7) получаем равенство

$$\int_0^{p/2} \cos^{2x-1} t \sin^{2y-1} t dt = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Отсюда, заменив  $x$  на  $a$ ,  $y$  на  $b$ , получаем формулу

$$\int_0^{p/2} \cos^{2a-1} x \sin^{2b-1} x dx = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \quad (9.9)$$

Так как  $a = 2\left(\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\right) - 1$ , то из (9.9) следует формула

$$\int_0^{p/2} \sin^a x \cos^b x dx = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2} + 1\right)}. \quad (9.10)$$

**п°3.** Вычислить интеграл  $\int_0^{p/2} \sin^5 x \cos^3 x dx$ .

Δ По формуле (9.10) имеем:

$$\int_0^{p/2} \sin^5 x \cos^3 x dx = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{5+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5+3}{2} + 1\right)} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(3)\Gamma(2)}{\Gamma(5)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 1}{4!} = \frac{1}{24}. \quad \blacktriangle$$

При  $b = -a$  формула (9.10) принимает вид

$$\int_0^{p/2} \operatorname{tg}^a x dx = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}, |a| < 1.$$

Отсюда и из формулы дополнения (9.3) получаем равенство

$$\int_0^{p/2} \operatorname{tg}^a x dx = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{a}{2}\right)\Gamma\left(1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{a}{2}\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{a}{2}\right)} = \frac{1}{2} \frac{p}{\sin\left(\frac{1}{2} + \frac{a}{2}\right)} = \frac{1}{2} \frac{p}{\cos \frac{ap}{2}}, |a| < 1,$$

или

$$\int_0^{p/2} \operatorname{tg}^a x dx = \frac{1}{2} \frac{p}{\cos \frac{ap}{2}}, |a| < 1. \quad (9.11)$$

**п°4.** По формуле (9.11) имеем  $\int_0^{p/2} \sqrt{\operatorname{tg} x} dx = \frac{1}{2} \frac{p}{\cos \frac{p}{4}} = \frac{p}{\sqrt{2}}$ .

В интеграле (9.5) сделаем замену

$$t = \frac{u}{1+u}, dt = \frac{du}{(1+u)^2}, u \in [0, \infty).$$

Тогда

$$B(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{u^{x-1}}{(1+u)^{x+y}} du = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Отсюда при  $x=a$ ,  $y=b$  получаем формулу

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}} dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \quad (9.12)$$

п°5. Вычислить интеграл  $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{(1+x)^7}} dx$ .

Δ По формуле (9.12) имеем

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{(1+x)^7}} dx = \int_0^{\infty} \frac{x^{3/2}}{(1+x)^{7/2}} dx = \int_0^{\infty} \frac{x^{5/2-1}}{(1+x)^{5/2+1}} dx = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}. \quad \blacktriangle$$

## § 10. Дифференциальные уравнения и функции Бесселя

**Уравнение Бесселя и его решение с помощью рядов.** Линейное однородное дифференциальное уравнение

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad (10.1)$$

называется *уравнением Бесселя* с параметром  $\nu$ .

Решение  $y = y(x)$  будем искать в виде обобщенного степенного ряда:

$$y = x^p \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+p}, a_0 \neq 0. \quad (10.2)$$

Отсюда имеем:

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+p) x^{k+p-1},$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+p)(k+p-1) x^{k+p-2}.$$

Подставив  $y, y'$  и  $y''$  в (10.1), получим:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+p)(k+p-1) x^{k+p} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+p) x^{k+p} +$$


---


$$+ \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+p+2} - \nu^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+p} = 0$$

или



$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left( (k+p)^2 + x^2 - v^2 \right) x^{k+p} = 0.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ , получим бесконечную систему:

$$\begin{array}{l|l} x^p & a_0(p^2 - v^2) = 0, \\ x^{p+1} & a_1((p+1)^2 - v^2) = 0, \\ x^{p+2} & a_2((p+2)^2 - v^2) + a_0 = 0, \\ x^{p+3} & a_3((p+3)^2 - v^2) + a_1 = 0, \\ \dots & \dots \\ x^{p+n} & a_n((p+n)^2 - v^2) + a_{n-2} = 0. \end{array}$$

При  $a_0 \neq 0$  имеем  $p = \pm v$ . Тогда при  $p = v$  коэффициенты  $a_n$  с нечетными индексами равны нулю, а с четными индексами

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{k! 2^{2k} (v+1)(v+2)\dots(v+k)}.$$

При  $a_0 = \frac{1}{2^v \Gamma(v+1)}$  имеем

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+v+1)2^{2k+v}}$$

и, следовательно, решение (10.2) представится в виде ряда

$$y = y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+v+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+v} = J_v(x). \quad (10.3)$$

При  $p = -v$  и  $a_0 = \frac{1}{2^{-v} \Gamma(-v+1)}$  имеем решение

$$J_{-v}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-v+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-v}. \quad (10.4)$$

Функции  $J_v(x)$  и  $J_{-v}(x)$ , определенные равенствами (10.3) и (10.4), называются *функциями Бесселя первого рода*. Общее решение уравнения Бесселя (10.1) при нецелом  $v$  имеет вид

$$y = C_1 J_v(x) + C_2 J_{-v}(x),$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные константы.

При целом  $n$  имеет место равенство

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x),$$

т.е. функции  $J_\nu(x)$  и  $J_{-\nu}(x)$  линейно зависимы. Второе линейно независимое решение уравнения второго порядка (10.1) определяется предельным соотношением

$$N_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{J_n(x) \cos p\nu - J_{-\nu}(x)}{\sin p\nu}, \quad \nu - \text{нечетное.}$$

Функция  $N_n(x)$  называется *функцией Неймана*. В этом случае общее решение уравнения (10.1) имеет вид

$$y = C_1 J_\nu(x) + C_2 N_n(x).$$

**Рекуррентные соотношения.** Продифференцировав функцию  $J_\nu(x)$ , будем иметь

$$\begin{aligned} J'_\nu(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k + \nu)}{2\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k}{2k\Gamma(k)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1} + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \nu}{2\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} (-1)}{\Gamma(k)\Gamma((k-1)+(\nu+1)+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(k-1)+(\nu+1)} + \frac{\nu}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = \\ &= -J'_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} J_\nu(x). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$J'_\nu(x) = -J'_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} J_\nu(x). \quad (10.5)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} J'_\nu(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2(k+\nu) - \nu)}{2\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+(\nu-1)+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu-1} - \\ &- \frac{\nu}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = J'_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x), \end{aligned}$$

т.е. имеет место рекуррентное соотношение

$$J'_\nu(x) = J'_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x).$$

**Интеграл Люамеля.** Решением уравнений

$$x^2 u'' + xu' + (b^2 x^2 - \nu^2)u = 0,$$

$$x^2 y'' + xy' + (a^2 x^2 - \nu^2)u = 0,$$

являются функции  $u = J_\nu(bx)$  и  $y = J_\nu(ax)$ . Умножим первое уравнение на  $\frac{y}{x}$ , второе – на  $\frac{u}{x}$  и затем вычтем из одного равенства другое. В результате получим равенство:

$$x(u''y - y''u) + (u'y - uy') = (a^2 - b^2)ixy,$$

которое при  $u' = bJ_\nu'(bx)$ ,  $y' = aJ_\nu'(ax)$  можно переписать в виде

$$x(u'y - y'u) = (a^2 - b^2)ixy,$$

или в подробной записи:

$$\left( x(bJ_\nu'(bx)J_\nu(ax) - aJ_\nu'(ax)J_\nu(bx)) \right)' = (a^2 - b^2)xJ_\nu(ax)J_\nu(bx). \quad (10.6)$$

Отсюда, используя рекуррентную формулу (10.5), получим равенство

$$xJ_\nu(ax)J_\nu(bx) = \left( \frac{x}{a^2 - b^2} (aJ_\nu(bx)J_{\nu+1}(ax) - bJ_\nu(ax)J_{\nu+1}(bx)) \right)'$$

Проинтегрировав равенство от 0 до  $x$ , получим формулу

$$\int_0^x sJ_\nu(as)J_\nu(bs) ds = \frac{x}{a^2 - b^2} (aJ_\nu(bx)J_{\nu+1}(ax) - bJ_\nu(ax)J_{\nu+1}(bx)),$$

которая называется *интегралом Люамеля*.

**Корни бесселевых функций.** Корнями бесселевых функций  $J_\nu(x)$  называются все точки  $x$ , при которых  $J_\nu(x) = 0$ .

Свойства корней:

1. Все корни бесселевых функций, кроме  $x=0$ , являются простыми.

Δ Если бы  $x_0$  был корнем кратности 2, то  $J_\nu(x_0) = 0$ ,  $J_\nu'(x_0) = 0$  и задача Коши для однородного линейного уравнения имела бы только нулевое решение. ▲

2. Все корни бесселевых функций – действительные числа.

Δ Если  $z$  – комплексный корень функции  $J_\nu(x)$ , то и  $\bar{z}$  – тоже корень этой функции. В этом случае при  $a = z$ ,  $b = \bar{z}$  из интеграла Люамеля получаем, учтя, что  $J_\nu(z) = 0$ ,  $J_\nu(\bar{z}) = 0$ , соотношение

$$\int_0^1 sJ_\nu(zs)J_\nu(\bar{z}s) ds = \frac{1}{z^2 - \bar{z}^2} (zJ_\nu(\bar{z})J_{\nu+1}(z) - \bar{z}J_\nu(z)J_{\nu+1}(\bar{z})) = 0, \quad (10.7)$$

что невозможно, поскольку  $sJ_\nu(zs)J_\nu(\bar{z}s) ds = s|J_\nu(zs)|^2 > 0$  при  $0 < s < 1$ . ▲

3. Корни бесселевых функций  $J_\nu(x)$  и  $J_{\nu+1}(x)$  взаимно разделены, т.е. между двумя последовательными корнями функции  $J_\nu(x)$  находится ровно один корень функции  $J_{\nu+1}(x)$ , и наоборот, между двумя корнями функции  $J_{\nu+1}(x)$  находится ровно один корень функции  $J_\nu(x)$ .

**Ортогональность бesselевых функций.** Напомним, что система функций  $\{j_n(x)\}$  называется *ортогональной* на отрезке  $[a, b]$  с весом  $p(x) > 0$ , если выполнены условия

$$\int_a^b p(x) j_i(x) j_j(x) dx = 0, i \neq j.$$

Нормой  $\|j_m\|$  функции  $j_n(x)$  с весом  $p(x)$  называется число, определяемое равенством

$$\|j_n\|^2 = \int_a^b p(x) j_n^2(x) dx.$$

Пусть  $a_i$  – корни бesselевой функции  $J_\nu(x)$ . Рассмотрим систему функций  $\{J_\nu(a_i x)\}$ . При  $z = a_i$  из равенства (10.7) имеем, заменив  $s$  на  $x$ :

$$\int_0^1 x J_\nu(a_i x) J_\nu(a_j x) dx = 0, i \neq j,$$

откуда следует, что система бesselевых функций  $\{J_\nu(a_i x)\}$  ортогональна на отрезке  $[0, 1]$  с весом  $p(x) = x$ . Норма бesselевых функций вычисляется по формуле:

$$\|J_\nu\|^2 = \int_0^1 x J_\nu^2(a_i x) dx.$$

Можно показать, используя интеграл Люамеля, что

$$\|J_\nu(a_i x)\| = \frac{1}{\sqrt{2}} J'_\nu(a_i).$$

**Разложение функций в ряд Фурье-Бесселя.** Пусть функция  $f(x)$  определена на отрезке  $[0, 1]$ . Рядом Фурье-Бесселя функции  $f(x)$  называется

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i J_\nu(a_i x),$$

где коэффициенты  $a_i$  определяются по формулам

$$a_i = \frac{2}{(J'_\nu(a_i))^2} \int_0^1 x f(x) J_\nu(a_i x) dx. \quad (10.8)$$

**п°1.** Разложить в ряд Фурье-Бесселя по системе функций  $\{J_0(a_i x)\}$ , где  $a_i$  – корни функции  $J_0(x)$ , функцию  $f(x) = 1$ .

Δ Коэффициенты  $a_i$  вычисляем по формуле (10.8):

при  $f(x) = 1$  имеем

$$a_i = \frac{2}{(J'_\nu(a_i))^2} \int_0^1 x J_\nu(a_i x) dx.$$

Из равенства (10.5) при  $V = 0$  получаем

$$J'_0(x) = -J_1(x). \quad (10.9)$$

При  $V = 1$  рекуррентное соотношение (10.6) имеет вид

$$J_1'(x) = J_0(x) - \frac{1}{x} J_1(x).$$

Отсюда следует, что

$$(xJ_1(x))' = J_1(x) + xJ_1'(x) = J_1(x) + x\left(J_0(x) - \frac{1}{x} J_1(x)\right) = xJ_0(x).$$

Подставив это значение  $xJ_0(x)$  в  $a_i$ , получим:

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{2}{(J_v'(a_i))^2} \int_0^1 xJ_v(a_i x) dx = \frac{2}{(J_v'(a_i))^2 a_i^2} \int_0^1 (a_i x)J_v(a_i x) d(a_i x) = \\ &= \frac{2}{(J_v'(a_i))^2 a_i^2} \int_0^{a_i} sJ_0(s) ds = \frac{2}{(J_v'(a_i))^2 a_i^2} \int_0^{a_i} (sJ_1(s))^2 ds = \\ &= \frac{2}{(J_v'(a_i))^2 a_i^2} \cdot a_i J_1(a_i) = \frac{2}{a_i J_1'(a_i)} \end{aligned}$$

в силу равенства (10.9).

Таким образом, ряд Фурье-Бесселя функции  $f(x) = 1$  по системе функций  $\{J_0(a_i x)\}$  имеет вид

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i J_0(a_i x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(a_i x)}{a_i J_1'(a_i)}.$$

▲

### Вопросы для самоконтроля

1. Линейные (векторные) пространства.
2. Аксиомы метрики. Метрические пространства.  
Пространства  $R^n$ ,  $C[a, b]$ ,  $L_2[a, b]$ ,  $l_2$ .
3. Аксиомы нормы. Нормированные линейные пространства. Нормы в пространствах  $R^n$ ,  $C[a, b]$ ,  $L_2[a, b]$ ,  $l_2$ .
4. Расстояние между элементами в метрическом и нормированном пространствах.
5. Сходимость последовательности в метрическом и нормированном пространствах.
6. Фундаментальные последовательности, их свойства.
7. Полные метрические, нормированные пространства.
8. Унитарные пространства.
9. Норма элемента и расстояние между точками в унитарном пространстве.
10. Гильбертово пространство.
11. Ортогональные и ортонормированные системы в гильбертовом пространстве.
12. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве.
13. Линейные операторы и линейные функционалы.
14. Дифференцируемость функционалов.
15. Вариации функционала.

16. Краевая задача математической физики: формулировка.
17. Простейшие уравнения с частными производными гиперболического, параболического и эллиптического типов.
18. Формула Д'Аламбера.
19. Метод разделения переменных для уравнений гиперболического, параболического и эллиптического типов.
20. Понятие об обобщенных функциях.
21.  $\delta$ -функция и ее свойства.
22. Импульсная реакция линейных стационарных систем с одним входом.
23. Симметрическое преобразование Фурье и его свойства.
24. Преобразование Фурье обобщенных функций.
25. Дискретное преобразование Фурье и его свойства.
26. Восстановление решетчатой функции по ее дискретному преобразованию Фурье.
27.  $Z$ -преобразование Лорана и его свойства.
28. Восстановление решетчатой функции по ее  $Z$ -преобразованию.
29. Решение линейных разностных уравнений с помощью  $Z$ -преобразования.
30. Преобразование Гильберта.
31. Определение  $\Gamma$ -функции.
32. Формула дополнения для  $\Gamma$ -функции.
33. Формула приведения для  $\Gamma$ -функции.
34. Применение интегралов Эйлера к вычислению некоторых определенных интегралов.
35. Дифференциальное уравнение Бесселя и порождаемые им функции.
36. Рекуррентные соотношения для бесселевых функций.
37. Корни бесселевых функций.
38. Ортогональность бесселевых функций.
39. Разложение функций в ряды Фурье-Бесселя.
40. Простейшая задача вариационного исчисления.
41. Необходимое условие экстремума функционала.
42. Уравнение Лагранжа-Эйлера.
43. Экстремали функционала.
44. Решение уравнения Эйлера-Лагранжа в специальных случаях.
45. Блочные матрицы.
46. Теорема Гамильтона-Кели.
47. Передача дискретной информации.
48. Расстояние Хэмминга.
49. Двоичные линейные коды.
50. Двойственный код.
51. Обнаружение ошибок кодирования.

## Контрольная работа

### Вариант 1

1. Найти решение  $u(x, t)$  уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, 0 \leq x \leq 1, t \geq 0$$

с граничными условиями  $u(0, t) = 0, u(1, t) = 0$  и начальными условиями

$$u(x, 0) = 2 \sin \pi x, \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

2. Найти симметричное преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

3. Решить линейное разностное уравнение

$$x(n+3) - 3x(n+2) + 3x(n+1) - x(n) = 2^n, x(0) = 0, x(1) = 0, x(2) = 1.$$

4. Найти допустимые экстремали функционала

$$J(y) = \int_0^1 (12xy + yy' + (y')^2) dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 4.$$

### Вариант 2

1. Найти решение  $u(x, t)$  уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

с граничными условиями  $u(0, t) = 0, u(2, t) = 0$  и начальными условиями

$$u(x, 0) = 4 \sin \frac{\pi x}{2}, \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

2. Найти симметричное преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

3. Решить линейное разностное уравнение

$$x(n+2) + x(n+1) + x(n) = 0, x(0) = 0, x(1) = -1.$$

4. Найти допустимые экстремали функционала

$$J(y) = \int_0^1 (y + 2xy' + (y')^2) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

### Вариант 3

1. Найти решение  $u(x, t)$  уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

с граничными условиями  $u(0, t) = 0, u(3, t) = 0$  и начальными условиями

$$u(x, 0) = 5 \sin \frac{\pi x}{3}, \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

2. Найти симметричное преобразование Фурье функции

$$f(x) = e^{-\beta x}, x \geq 0, \beta > 0; f(-x) = f(x).$$

3. Решить линейное разностное уравнение

$$x(n+2) - 3x(n+1) - 10x(n) = 0, x(0) = 3, x(1) = -1.$$

4. Найти допустимые экстремали функционала

$$J(y) = \int_0^{\ln 2} ((y')^2 + 3y^2) e^{2x} dx, \quad y(0) = 0, \quad y(\ln 2) = \frac{15}{8}.$$

#### Вариант 4

1. Найти решение  $u(x, t)$  уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 16 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

с граничными условиями  $u(0, t) = 0, u(4, t) = 0$  и начальными условиями

$$u(x, 0) = 6 \sin \frac{\pi x}{4}, \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

2. Найти симметричное преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax}, & x > 0, a > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

3. Решить линейное разностное уравнение

$$x(n+2) - 4x(n) = 4^n, x(0) = 1, x(1) = 1.$$

4. Найти допустимые экстремали функционала

$$J(y) = \int_0^1 x^2 (y')^2 dx, \quad y(1) = 3, \quad y(2) = 1.$$

#### Вариант 5

1. Найти решение  $u(x, t)$  уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 25 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

с граничными условиями  $u(0, t) = 0, u(5, t) = 0$  и начальными условиями

$$u(x, 0) = 3 \sin \frac{\pi x}{5}, \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0.$$



2. Найти симметричное преобразование Фурье функции  $f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$ .

3. Решить линейное разностное уравнение

$$x(n+2) - 6x(n+1) + 9x(n) = n3^n, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0.$$

4. Найти допустимые экстремали функционала

$$J(y) = \int_0^6 (2xy - (y')^2) dx, \quad y(0) = 1, \quad y(6) = 1.$$

### Вариант 6

1. Найти решение  $u(x, t)$  уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

с граничными условиями  $u(0, t) = 0, u(1, t) = 0$  и начальными условиями

$$u(x, 0) = 4 \sin 2\pi x, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

2. Найти симметричное преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & x < 0, x > 1. \end{cases}$$

3. Решить линейное разностное уравнение

$$x(n+2) - x(n) = (-1)^n, \quad x(0) = 1, \quad x(1) = -1.$$

4. Найти допустимые экстремали функционала

$$J(y) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{y} dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0.$$

### Вариант 7

1. Найти решение  $u(x, t)$  уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

с граничными условиями  $u(0, t) = 0, u(2, t) = 0$  и начальными условиями

$$u(x, 0) = 3 \sin \pi x, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

2. Найти симметричное преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$$

3. Решить линейное разностное уравнение

$$x(n+2) + x(n) = 1, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1.$$

4. Найти допустимые экстремали функционала

$$J(y) = \int_0^1 ((y')^4 - 6(y')^2) dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

### Вариант 8

1. Найти решение  $u(x, t)$  уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

с граничными условиями  $u(0, t) = 0, u(3, t) = 0$  и начальными условиями

$$u(x, 0) = 2 \sin \frac{2\pi x}{3}, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

2. Найти симметричное преобразование Фурье функции  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ .

3. Решить линейное разностное уравнение

$$x(n+2) - x(n) = 1, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0.$$

4. Найти допустимые экстремали функционала

$$J(y) = \int_0^1 (12xy + yy' + (y')^2) dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 4.$$

### Вариант 9

1. Найти решение  $u(x, t)$  уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 16 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

с граничными условиями  $u(0, t) = 0, u(4, t) = 0$  и начальными условиями

$$u(x, 0) = 5 \sin \frac{\pi x}{2}, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

2. Найти симметричное преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 3, \\ 0, & |x| > 3. \end{cases}$$

3. Решить линейное разностное уравнение

$$x(n+2) - 5x(n+1) + 6x(n) = 0, \quad x(0) = 1, \quad x(1) = 2.$$

4. Найти допустимые экстремали функционала

$$J(y) = \int_0^1 \frac{1+y^2}{y'} dx, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0.$$

### Вариант 10

1. Найти решение  $u(x, t)$  уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 25 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

с граничными условиями  $u(0, t) = 0, u(5, t) = 0$  и начальными условиями

$$u(x, 0) = 6 \sin \frac{2\pi x}{3}, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0.$$

2. Найти симметричное преобразование Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 5, \\ 0, & x < 0, x > 5. \end{cases}$$

3. Решить линейное разностное уравнение

$$x(n+2) + 6x(n+1) + 13x(n) = 1, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1.$$

4. Найти допустимые экстремали функционала

$$J(y) = \int_0^{\pi/4} ((y')^2 - 4y^2) dx, \quad y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

### Программа курса «Специальные математические методы и функции»

1. Линейное (векторное) пространство. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Базис и размерность линейного пространства. [8,11]
2. Элементы функционального анализа: метрические пространства; нормированные линейные пространства со скалярным произведением; пространства Евклида, Гильберта, Хемминга. Полнота метрического пространства. [1, 4, 12]
3. Обобщенный ряд Фурье. [5, 6, 10, 16]
4. Интеграл Фурье, преобразование Фурье. [5, 6, 10, 16]
5. Линейные отображения, функционалы, операторы. Уравнения в операторной форме и их решения. [1, 11, 12]
6. Обзор задач математической физики. Метод Фурье. [15]
7. Преобразование Фурье и его свойства. Функция Дирака. [5, 6, 10, 16]
8. Спектральные плотности сигналов специального вида: спектральная плотность постоянного и комплексного сигналов; спектральная плотность гармонических колебаний; спектральная плотность произвольного периодического сигнала. [2, 14]
9. Преобразование Фурье для прямоугольного сигнала и обратное к нему. Схема простого модулятора. Принцип неопределенности. [2, 10, 14]
10. Аналитический сигнал. Спектральная характеристика аналитического сигнала. Преобразование Гильберта для гармонических сигналов. Преобразование Гильберта для узкополосного сигнала. [2, 10, 14, 16]
11. Решетчатые функции и их свойства. Z-преобразование. [10,14,16]
12. Свойства Z-преобразования. [10,14,16]
13. Решение разностных уравнений и систем разностных уравнений с помощью Z-преобразования. [9,14,16]

14. Вариационное исчисление: постановка задачи; простейшая задача вариационного исчисления; лемма Эйлера; уравнение Эйлера-Лагранжа; изопериметрическая вариационная задача. [3, 10]
15. Приложения матриц к системам связи. [2, 9]
16. Эйлеровы функции  $\Gamma(x)$  и  $B(x, y)$ . [4, 5, 10, 16]
17. Дифференциальные уравнения и функции Бесселя. [13, 15]

### Литература

1. Антонец А.Б., Радыно Я.В. Функциональный анализ и интегральные уравнения. Мн.: БГУ, 2003, 329 с.
2. Бендат Дж., Парсол А. Прикладной анализ случайных данных. М.: Мир, 1989, 540 с.
3. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. М. Физматгиз 1961г
4. Ефимов А.В., Золотарев Ю.Г., Терпигорева В.М. Математический анализ (специальные разделы). Ч. 2. Применение некоторых методов математического и функционального анализа: М.: Высшая школа, 1980, 296 с.
5. Зорич В. А. Математический анализ. Часть I. М.: Наука, 1981. 544 с.
6. Зорич В. А. Математический анализ. Часть II. М.: Наука, 1984. 640 с.
7. Келли Дж. Общая топология. М.: Наука, 1968, 384 с.
8. Косневски Ч. Начальный курс алгебраической топологии. М.: Мир, 1983, 302 с.
9. Кофман А. Введение в прикладную комбинаторику. М.: Наука, 1975, 480 с.
10. Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Наука, 1970, 672 с.
11. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. Изд-во: Лань, 2007, 555 с.
12. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965, 520 с.
13. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Мн.: Вышэйшая школа, 1974, 768 с.
14. Сиберт У.М. Цепи. Сигналы. Системы. Ч. 1-2. М. 1988.
15. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: изд-во МГУ, 1999, 768 с.
16. Шварц Лоран. Анализ. Т. 1. М.: Мир, 1972, 824 с.

## Содержание

Введение .....	3
§ 1. Линейные, метрические и гильбертовы пространства .....	4
1.1. Линейное пространство .....	4
1.2. Линейная зависимость и независимость системы векторов. ....	6
Базис и размерность линейного пространства .....	6
1.3. Евклидово пространство .....	10
1.4. Метрические пространства .....	12
1.5. Полнота метрического пространства $(X, \rho)$ .....	14
1.6. Пространство Гильберта .....	15
Задачи для самостоятельного решения .....	17
§ 2. Обобщенный ряд Фурье, интеграл Фурье, преобразование Фурье .....	19
2.1. Обобщенный ряд Фурье .....	19
2.3. Преобразование Фурье .....	24
Задачи для самостоятельного решения .....	24
§ 3. Линейные отображения, функционалы, операторы. Уравнения в операторной форме. Простейшие задачи математической физики .....	25
3.1. Линейные отображения .....	25
3.2. Обзор задач математической физики. Метод Фурье .....	29
Задачи для самостоятельного решения .....	41
§ 4. Преобразование Фурье и его свойства .....	42
4.1. Преобразование Фурье .....	42
4.2. Функция Дирака $\delta(t)$ .....	48
4.3. Спектральная плотность постоянного сигнала .....	49
4.4. Спектральная плотность комплексного сигнала .....	50
4.6. Спектральная плотность произвольного периодического сигнала .....	52
4.7. Краткая таблица преобразований Фурье .....	54
Задачи для самостоятельного решения .....	56
§ 5. Преобразование Гильберта и его свойства .....	56
5.1. Преобразование Фурье для прямоугольного сигнала и обратное к нему .....	56
5.2. Схема простого модулятора .....	57
5.3. Принцип неопределенности .....	60
5.5. Спектральная характеристика аналитического сигнала .....	64
5.6. Преобразование Гильберта для гармонических сигналов .....	66
5.7. Преобразование Гильберта для узкополосного сигнала .....	67
Задачи для самостоятельного решения .....	69
§ 6. Решетчатые функции и их свойства. Z-преобразование, его свойства и приложения .....	69
6.1. Решетчатые функции .....	69

6.2. $Z$ -преобразование .....	71
6.3. Свойства $Z$ -преобразования .....	72
6.4. Решение разностных уравнений и систем разностных уравнений с помощью $Z$ -преобразования.....	77
Задачи для самостоятельного решения.....	82
§ 8. Приложения матриц к системам связи.....	93
§ 9. Эйлеровы функции $\Gamma(x)$ и $B(x, y)$ .....	101
§ 10. Дифференциальные уравнения и функции Бесселя .....	106
Вопросы для самоконтроля.....	111
Контрольная работа.....	113
Программа курса «Специальные математические методы и функции» .....	117
Литература .....	118