

Министерство образования Республики Беларусь  
Учреждение образования  
«Белорусский государственный университет  
информатики и радиоэлектроники»  
Институт информационных технологий  
  
Кафедра физико-математических дисциплин

## **МАТЕМАТИКА**

Методические указания  
к выполнению индивидуальных заданий к  
контрольным работам  
для студентов всех специальностей ИИТ БГУИР  
заочной формы получения высшего образования

Минск БГУИР 2015

# Контрольные работы по дисциплине Математика I семестр 2015-2016 учебного года.

Уважаемые студенты!

Необходимо решить контрольные работы №1 и №2: вариант 1 решают те студенты, у которых последняя цифра номера зачетки нечетная; вариант 2 – у которых 0 или четная.

Решенные и оформленные контрольные работы представляются преподавателю на первом практическом занятии зимней сессии. На практическом занятии (в аудитории) необходимо будет решить аналогичные контрольные работы для допуска к экзамену. Возможно досрочное написание контрольных работ в дни консультаций заочников.

Консультации проводятся в 1-ю и 3-ю календарные субботы (День заочника) по расписанию (см. сайт ИИТ БГУИР)

## Контрольная работа №1

### Комплексные числа

**Задача 1.** Даны три комплексных числа  $z_1$ ,  $z_2$  и  $z_3$ :

1) выполните действия над ними в алгебраической, тригонометрической и показательной формах;

2) найдите расстояние между точками  $z_1$  и  $z_3$  на комплексной плоскости.

$$\text{Вар-1. } z_1 = 2\sqrt{3} + 2i, \quad z_2 = -1 - \sqrt{3}i, \quad z_3 = 2 - 2i, \quad \frac{z_1 z_3^2}{z_2^4}.$$

$$\text{Вар-2. } z_1 = \sqrt{3} - i, \quad z_2 = 2 - 2\sqrt{3}i, \quad z_3 = -1 + i, \quad \frac{z_1^4}{z_2 z_3^2}.$$

**Задача 2.** Решите уравнение на множестве комплексных чисел.

$$\text{Вар-1. } z^2 - 4z + 5 = 0.$$

$$\text{Вар-2. } z^2 + 2z + 2 = 0.$$

## Элементы линейной алгебры

**Задача 3.** Решите систему уравнений:

1) методом Крамера;

2) методом Гаусса.

$$\text{Вар-1. } \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -6, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 6, \\ x_1 - x_2 + x_3 = -4. \end{cases} \quad \text{Вар-2. } \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = -8, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

## Элементы векторной алгебры

**Задача 4.** Даны три вектора  $\bar{a}_1$ ,  $\bar{a}_2$  и  $\bar{a}_3$ . Докажите, что векторы  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$  образуют базис, и определите, какая это тройка векторов: правая или левая.

$$\text{Вар-1. } \bar{a}_1 = (1; -3; 2), \quad \bar{a}_2 = (3; -2; 1), \quad \bar{a}_3 = (4; 1; -4).$$

$$\text{Вар-2. } \bar{a}_1 = (1; -1; -2), \quad \bar{a}_2 = (2; 1; -1), \quad \bar{a}_3 = (3; -4; 1).$$

## Элементы аналитической геометрии

**Задача 5.** Даны координаты вершин треугольной пирамиды  $A_1A_2A_3A_4$ .

Найдите:

1) угол между ребрами  $A_1A_2$  и  $A_1A_4$ ;

2) площадь грани  $A_1A_2A_3$ ;

3) длину высоты, опущенной из вершины  $A_4$  на грань  $A_1A_2A_3$ ;

4) уравнение прямой, проходящей через ребро  $A_1A_2$ ;

5) уравнение плоскости, которой принадлежит грань  $A_1A_2A_3$ .

6) массу материальной треугольной пирамиды  $A_1A_2A_3A_4$ , изготовленной из меди плотностью  $\mu = 8,9 \text{ г/см}^3$  (считая, что 1 масштабная единица в системе координат равна 1 см).

$$\text{Вар-1. } A_1(2; 1; -3), \quad A_2(1; 3; -2), \quad A_3(3; -2; -1), \quad A_4(1; -1; 3).$$

$$\text{Вар-2. } A_1(3; 1; -3), \quad A_2(2; 3; 1), \quad A_3(1; 2; 3), \quad A_4(2; -2; 1).$$

**Задача 6.** Изобразите геометрическое место точек, заданных уравнением:

- 1) на плоскости;
- 2) в пространстве.

Вар-1.  $9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y - 124 = 0$ .

Вар-2.  $2x^2 - 12x + y + 20 = 0$ .

## Контрольная работа №2

### Элементы математического анализа

**Задача 1.** Найдите пределы последовательностей.

Вар-1. а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+3)(n+2)^2 - n(n+1)^2}{3n^2 + 1}$ ;      в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5n^2 - n + 4}{5n^2 - 2n + 3} \right)^{5n+1}$ .

б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n! - 3(n-1)!}{3n \cdot n! + (n-1)!}$ ;

Вар-2. а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(2n^2 - 1)}{n(n+2)^3 - (n-1)(n+1)^3}$ ;      в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4n^2 + n + 3}{4n^2 - 3n + 2} \right)^{2n-1}$ .

б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2(n+1)! - 3n!}{2(n+3)! - n!}$ ;

**Задача 2.** Найдите производную  $y'(x)$  заданных функций.

Вар-1. а)  $y = \sin(\operatorname{arctg}^4(4x^3))$ ;      в)  $y = \ln \frac{(x+3)^2}{\sqrt[3]{x+2} \sqrt[4]{(x-1)^5}}$ .

б)  $y = \frac{\sqrt{x^2 - 7x + 10}}{e^{2x}}$ ;

Вар-2. а)  $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arccos}^3(3x^2))$ ;      в)  $y = \ln \frac{\sqrt{(x-2)^3} (x-1)^5}{\sqrt[3]{(x+5)^4}}$ .

б)  $y = \frac{e^{4x}}{\sqrt{x^2 - 9x + 8}}$ ;

**Задача 3.** Найдите предел функции:

Вар-1.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{\sqrt{2-x}-1}$ .

Вар-2.  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} x}$ .

**Задача 4.** Дана функция  $u = u(x, y, z)$ :

- 1) вычислите все частные производные первого порядка;
- 2) найдите производную в точке  $M_0$  по направлению вектора  $\bar{a}$ ;
- 3) найдите  $\overline{\operatorname{grad}} u(M_0)$ .

Вар-1.  $u = \frac{xz}{x-y}$ ,  $M_0(3; 1; 1)$ ,  $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$ .

Вар-2.  $u = ze^{-xy}$ ,  $M_0(0; 1; 2)$ ,  $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$ .

**Задача 5.** Дана функция  $u = u(x, y, z)$ . Вычислите значение ее частной производной четвертого порядка в точке  $M_0(1; 1; 1)$ .

Вар-1.  $u = \arcsin(1-3z) + x^2y^3z^3 + \ln(2-xy)$ ,  $\frac{\partial^4 u(M_0)}{\partial z \partial x^2 \partial y}$ .

Вар-2.  $u = \operatorname{ctg}(1+2x) - x^3yz^4 + e^{y+z^2}$ ,  $\frac{\partial^4 u(M_0)}{\partial x \partial z^2 \partial y}$ .

**Задача 6.** Найдите неопределенные интегралы.

Вар-1. а)  $\int \frac{\sqrt[5]{x}(x+1)}{x^2} dx$ ;

в)  $\int x(x-3) \cos 2x dx$ ;

б)  $\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{ctg}^3 3x}}{\sin^2 3x} dx$ ;

г)  $\int \frac{3^x dx}{3^x - 3^{-x}}$ .

Вар-2. а)  $\int \frac{5^x}{2^{2x}} dx$ ;

в)  $\int x(3x-2)e^{\frac{x}{2}} dx$ ;

б)  $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{\cos 2x}} dx$ ;

г)  $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2-2}}$ .

# Учебная программа дисциплины «Математика»

## Раздел 1. Комплексные числа

Алгебраическая форма комплексного числа. Мнимая единица. Действия над комплексными числами в алгебраической форме. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа. Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах. Формула Муавра.

Решение квадратных уравнений на множестве комплексных чисел.

## Раздел 2. Линейная алгебра

**Тема 2.1. Матрицы.** Матрицы. Виды матриц. Транспонирование. Сложение матриц и умножение матрицы на число, свойства этих операций. Умножение матриц, свойства умножения. Степень матрицы с натуральным показателем. Элементарные преобразования матрицы. Эквивалентные матрицы. Приведение матрицы к треугольному виду. Обратная матрица, ее существование и вычисление.

**Тема 2.2. Определители.** Определители 2-го и 3-го порядков, их свойства. Определители  $n$ -го порядка. Миноры и алгебраические дополнения. Различные способы вычисления определителей.

**Тема 2.3. Системы линейных алгебраических уравнений.** Системы линейных алгебраических уравнений. Формулы Крамера. Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.

## Раздел 3. Векторная алгебра

**Тема 3.1. Векторы на плоскости и в пространстве.** Понятие вектора. Координаты вектора. Длина вектора. Линейные операции над векторами в векторной форме. Линейно-зависимые и линейно-независимые системы векторов. Базис. Разложение вектора по базису. Координаты вектора в базисе.

**Тема 3.2. Системы координат.** Прямоугольная декартова система координат на плоскости и в пространстве. Координаты вектора в прямоугольной декартовой системе координат. Линейные операции над векторами в координатной форме. Длина вектора в координатах. Полярная система координат. Цилиндрическая и сферическая системы координат.

**Тема 3.3. Скалярное, векторное, смешанное произведение векторов.** Скалярное произведение векторов в геометрической и координатной форме, его свойства и физический смысл. Угол между двумя векторами и формула его косинуса. Условие ортогональности двух векторов. Векторное произведение векторов в геометрической и координатной формах. Свойства векторного произведе-

дения и его геометрический смысл. Смешанное произведение векторов в векторной и координатной формах, его свойства и геометрический смысл. Правая и левая тройки векторов. Критерий компланарности трех векторов.

#### **Раздел 4. Аналитическая геометрия**

**Тема 4.1. Прямая и плоскость.** Прямая на плоскости: различные виды уравнений. Плоскость в пространстве: различные виды уравнений. Прямая в пространстве: различные виды уравнений. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве.

**Тема 4.2. Кривые 2-го порядка.** Эллипс: каноническое уравнение, характеристики, изображение. Гипербола: каноническое уравнение, характеристики, изображение. Парабола: каноническое уравнение, характеристики, изображение.

**Тема 4.3. Поверхности 2-го порядка.** Эллипсоид, гиперболоиды, конус, параболоиды, цилиндры: канонический вид уравнений поверхностей и их изображение.

#### **Раздел 5. Предел и непрерывность**

**Тема 5.1. Последовательность и ее предел.** Понятие числовой последовательности. Способы задания числовой последовательности. Ограниченная и монотонная последовательности. Предел последовательности. Свойства сходящихся последовательностей. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности. Монотонные последовательности. Сходимость монотонной последовательности. Число « $\epsilon$ ».

**Тема 5.2. Предел функции.** Понятие предела функции в точке. Предел функции на бесконечности. Свойства функций, имеющих предел. Виды неопределенностей. Раскрытие неопределенностей. Первый и второй замечательные пределы. Эквивалентные функции. Таблица эквивалентности бесконечно малых. Односторонние пределы.

**Тема 5.3. Непрерывность функции.** Непрерывность функции в точке. Свойства функций, непрерывных на отрезке. Односторонняя непрерывность. Классификация точек разрыва функции. Непрерывность функции на промежутке. Свойства функций, непрерывных на отрезке. Асимптоты графика функции.

#### **Раздел 6. Дифференциальное исчисление функций одной переменной**

**Тема 6.1. Производная и дифференциал 1-го порядка.** Производная функции, ее геометрический и физический смысл. Основные правила дифференцирования. Таблица производных. Дифференцирование сложной функции. Логарифмическая производная. Дифференцирование функций, заданных пара-

метрически и неявно. Дифференциал функции, использование в приближенных вычислениях. Правило Лопиталя.

**Тема 6.2. Производные и дифференциалы высших порядков.** Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора. Разложение основных элементарных функций по формуле Маклорена.

**Тема 6.3. Исследование функций.** Условие монотонности функции. Локальный экстремум функции: необходимое и достаточное условия. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке. Необходимые и достаточные условия выпуклости и перегиба графика функции. Исследование функции и построение ее графика.

## **Раздел 7. Функции многих переменных**

**Тема 7.1. Функции многих переменных, дифференцируемость.** Понятие функции многих переменных. Предел функции в точке, непрерывность. Частные производные функций многих переменных. Дифференцируемость функции многих переменных и ее дифференциал. Производная по направлению. Градиент. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

**Тема 7.2. Частные производные высших порядков.** Частные производные высших порядков. Теорема о равенстве смешанных производных. Понятие неявной функции, определяемой одним уравнением, и ее дифференцируемость. Необходимые и достаточные условия экстремума функций многих переменных.

## **Раздел 8. Неопределенный интеграл**

**Тема 8.1. Правила и методы интегрирования.** Первообразная и ее свойства. Таблица интегралов. Интегрирование методами замены переменной и поднесения под дифференциал. Интегрирование по частям.

**Тема 8.2. Интегрирование основных классов функций.** Интегрирование простейших рациональных дробей и рациональных функций. Интегрирование тригонометрических выражений. Интегрирование иррациональных функций. Интегрирование дифференциального бинома.

## **Рекомендации по выполнению задач по контрольной работе**

### **3.1. Рекомендуемая литература для подготовки к контрольным работам**

1. Гусак, А. А. Высшая математика : учеб. для вузов : в 2 т. / А. А. Гусак. – Минск : ТетраСистемс, 2009. – Т. 1. – 544 с. ; Т. 2. – 448 с.



2. Жевняк, Р. М. Высшая математика : в 5 ч. / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1984–1988. – Ч. 1. – 1984. – 223 с. ; Ч. 2. – 1985. – 221 с. ; Ч. 3. – 1985. – 208 с. ; Ч. 4. – 1987. – 240 с. ; Ч. 5. – 1988. – 256 с.
3. Жевняк, Р. М. Высшая математика. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Дифференциальное исчисление / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1992. – 384 с.
4. Жевняк, Р. М. Высшая математика. Функции многих переменных. Интегральное исчисление / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1993. – 412 с.
5. Жевняк, Р. М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Ряды. Уравнения математической физики. Теория функций комплексной переменной / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : ИРФ «Обозрение», 1997. – 570 с.
6. Жевняк, Р. М. Высшая математика. Операционное исчисление. Теория вероятностей. Математическая статистика / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : ИРФ «Обозрение», 1997. – 572 с.
7. Майсеня, Л. И. Справочник по высшей математике / Л. И. Майсеня, В. Э. Жавнерчик. – Минск : ТетраСистемс, 2010. – 272 с.
8. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис-пресс, 2009. – 608 с.
9. Руководство к решению задач по высшей математике : в 2 ч. / Е. И. Гурский [и др.] ; под общ. ред. Е. И. Гурского. – Минск : Выш. шк., 1989–1990. – Ч. 1. – 1989. – 349 с. ; Ч. 2. – 1990. – 400 с.
10. Сухая, Т. А. Задачи по высшей математике : в 2 ч. / Т. А. Сухая, В. Ф. Бубнов. – Минск : Выш. шк., 1993. – Ч. 1. – 446 с. ; Ч. 2. – 301 с.

### **3.2. Краткие теоретические сведения к выполнению контрольной работы**

**Задача1.** *Алгебраическая форма комплексного числа:*

$$z = a + bi,$$

где  $a, b \in \mathbf{R}$ ;  $i = \sqrt{-1}$ .

Если  $z_1 = a_1 + b_1i$ ,  $z_2 = a_2 + b_2i$ , то:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i;$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i;$$

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i, \quad z_2 \neq 0.$$

Число  $z = a + bi$  на координатной плоскости соответствует точка  $(a; b)$ .

Расстояние  $d$  между точками  $M_1(x_1; y_1)$  и  $M_2(x_2; y_2)$  в прямоугольной декартовой системе координат:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Всякое комплексное число  $z = a + bi$  ( $z \neq 0$ ) можно представить в *тригонометрической форме*

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

или в *показательной форме*

$$z = r e^{i\varphi},$$

где  $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$  – модуль числа  $z$ ;

$\varphi = \arg z$  ( $0 \leq \varphi < 2\pi$  либо  $-\pi < \varphi \leq \pi$ ) – аргумент числа  $z$ :

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{cases}$$

Если  $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ ,  $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ ,  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , причем  $z_1, z_2, z \neq 0$ , то:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2));$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2));$$

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad n \in \mathbf{N}.$$

Если  $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ ,  $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ ,  $z = r e^{i\varphi}$ , причем  $z_1, z_2, z \neq 0$ , то:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)};$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)};$$

$$z^n = r^n e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

**Задача 2.** Если  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ,  $z \neq 0$ ,  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n > 1$ , то

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)_k = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Корень  $n$ -й степени из комплексного числа  $z$  имеет  $n$  различных значений.

**Задача 3.** Система трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными  $x_1, x_2, x_3$  имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

где  $a_{ij}$  – коэффициенты системы;  $b_i$  – свободные члены.

Матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

называется *матрицей системы*.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ – матрица-столбец неизвестных; } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \text{ – матрица-столбец}$$

свободных членов.

Определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

называется *определителем системы*.

Матрица

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right]$$

называется *расширенной матрицей системы*.

*Элементарными преобразованиями строк матрицы* называются:

1) перестановка строк;

2) умножение строки на одно и то же число  $\lambda$  ( $\lambda \neq 0$ );

) прибавление к строке матрицы другой ее строки, умноженной на некоторое число.

Если определитель системы  $\Delta \neq 0$ , то система имеет единственное решение.

Метод Крамера. Необходимо:

- 1) вычислить определитель  $\Delta$ ;
- 2) в определителе  $\Delta$  заменить поочередно  $i$ -й столбец столбцом свободных членов и вычислить соответствующие определители  $\Delta_i$  ( $i=1, 2, 3$ ):

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix};$$

- 3) вычислить значения  $x_1, x_2, x_3$  по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta};$$

- 4) записать решение  $(x_1; x_2; x_3)$ .

Метод обратной матрицы. Необходимо:

- 1) записать систему в матричном виде:

$$AX = B,$$

где  $A$  – матрица системы;

$X$  – матрица-столбец неизвестных;

$B$  – матрица-столбец свободных членов;

- 2) решить матричное уравнение

$$X = A^{-1}B,$$

где  $A^{-1}$  – обратная матрица;

- 3) записать решение  $(x_1; x_2; x_3)$ .

Метод Гаусса. Необходимо:

- 1) записать расширенную матрицу системы;
- 2) с помощью элементарных преобразований строк расширенной матрицы свести матрицу системы к треугольной или трапециевидной (с нулевыми элементами под главной диагональю);
- 3) для преобразованной таким образом расширенной матрицы записать соответствующую систему уравнений;
- 4) решить полученную систему, начиная с последнего уравнения;
- 5) записать решение  $(x_1; x_2; x_3)$ .

**Задача 4.** *Базисом в пространстве* называются три упорядоченных некопланарных вектора.

Векторы называются *компланарными*, если они параллельны одной и той же плоскости. Для компланарности ненулевых векторов  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение было равно нулю, т. е.  $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = 0$ .

Если  $\bar{a} = (x_1; y_1; z_1)$ ,  $\bar{b} = (x_2; y_2; z_2)$ ,  $\bar{c} = (x_3; y_3; z_3)$ , то смешанное произведение в координатной форме:

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Упорядоченная тройка некопланарных векторов  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  с общим началом называется *правой*, если кратчайший поворот от вектора  $\bar{a}$  к вектору  $\bar{b}$  наблюдается из конца вектора  $\bar{c}$  и происходит против хода часовой стрелки. В противном случае тройка векторов называется *левой*.

Тройка векторов  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  является правой тогда и только тогда, когда  $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) > 0$ , и левой, когда  $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) < 0$ .

**Задача 5.** Пусть  $\bar{a} = (x_1; y_1; z_1)$ ,  $\bar{b} = (x_2; y_2; z_2)$ ,  $\bar{c} = (x_3; y_3; z_3)$ . Тогда

$$\cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Площадь  $S$  треугольника, построенного на векторах  $\bar{a}, \bar{b}$ :

$$S = \frac{1}{2} |[\bar{a}, \bar{b}]|,$$

где  $|[\bar{a}, \bar{b}]|$  – длина вектора и

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Объем  $V$  пирамиды, построенной на векторах  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ :

$$V = \frac{1}{6} |(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})|,$$

где  $|(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})|$  – модуль числа и

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Уравнение прямой, проходящей через точки  $M_1(x_1; y_1; z_1)$  и  $M_2(x_2; y_2; z_2)$ :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Уравнение плоскости, проходящей через точки  $M_1(x_1; y_1; z_1)$ ,  $M_2(x_2; y_2; z_2)$  и  $M_3(x_3; y_3; z_3)$ :

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

**Задача 6.** На плоскости уравнение

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

задает эллипс с полуосями  $a$ ,  $b$  и центром в точке  $C(x_0; y_0)$ ; в пространстве – эллиптический цилиндр.

На плоскости уравнение

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

задает гиперболу с полуосями  $a$ ,  $b$  и центром в точке  $C(x_0; y_0)$ ; в пространстве – гиперболический цилиндр.

На плоскости уравнения

$$(y-y_0)^2 = \pm 2p(x-x_0) \quad \text{или} \quad (x-x_0)^2 = \pm 2p(y-y_0)$$

задают параболы с осью симметрии, параллельной одной из координатных осей, и вершиной в точке  $C(x_0; y_0)$ ; в пространстве – параболические цилиндры.

**Задача 7.** Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, в противном случае – *расходящейся*.

Если последовательности  $(x_n)$  и  $(y_n)$  сходятся, то:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} cx_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \quad c = \text{const};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0.$$

Выражения вида  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $\infty - \infty$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $1^\infty$ ,  $0^0$ ,  $\infty^0$  называются *неопределенностями*.

При раскрытии неопределенности вида  $1^\infty$  используют формулу

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

где  $e = 2,71828\dots$  – иррациональное число.

**Задача 8.** Правила дифференцирования. Если  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$  – дифференцируемые функции, то:

$$(cu)' = cu', \quad c = \text{const};$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v';$$

$$(uv)' = u'v + uv';$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad v \neq 0.$$

Если  $y = f(g(x))$  – сложная функция, где  $y = f(u)$ ,  $u = g(x)$  – дифференцируемые функции, то

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{dg}{dx}.$$

Таблица производных.

$(c)' = 0, \quad c = \text{const};$	
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha = \text{const}),$ в частности,	
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}},$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};$
$(a^x)' = a^x \ln a \quad (a = \text{const}, a > 0),$ в частности,	
$(e^x)' = e^x;$	
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (a = \text{const}, a > 0, a \neq 1),$ в частности,	
$(\ln x)' = \frac{1}{x};$	
$(\sin x)' = \cos x;$	$(\cos x)' = -\sin x;$
$(\text{tg } x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$	$(\text{ctg } x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
$(\text{arctg } x)' = \frac{1}{1+x^2};$	$(\text{arcctg } x)' = -\frac{1}{1+x^2},$

**Задача 9.** Если существуют  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ , то:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad c = \text{const};$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0.$$

При раскрытии неопределенности вида  $\frac{0}{0}$  часто используют формулы:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (\text{первый замечательный предел});$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \quad \alpha \neq 0.$$

Функция  $f(x)$  называется *бесконечно малой* при  $x \rightarrow x_0$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ .

Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ , где  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  – бесконечно малые при  $x \rightarrow x_0$ , то  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  называются *эквивалентными*; пишут:  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ ,  $x \rightarrow x_0$ .

Если отношение двух бесконечно малых имеет предел, то он не изменится при замене каждой из бесконечно малых эквивалентной ей бесконечно малой.

Если  $\alpha(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow x_0$ , то верны следующие эквивалентности:

$$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x); \quad \operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x);$$

$$\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x); \quad \operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x);$$

$$\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x); \quad e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x).$$

**Правило Лопиталья.** Если  $f(x)$  и  $g(x)$  – непрерывные функции, имеющие производные в проколотой окрестности точки  $x_0$ , причем  $g(x) \neq 0$ ,  $g'(x) \neq 0$  в указанной окрестности,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$  (или

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ ) и существует  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Задача 10.** При вычислении частной производной  $\frac{\partial u}{\partial x}$  функции трех переменных  $u = f(x, y, z)$  считают  $y, z$  постоянными и пользуются правилами дифференцирования и таблицей производных для функции одной переменной  $x$ .



При вычислении частной производной  $\frac{\partial u}{\partial y}$  считают, что  $y$  – переменная величина,  $x, z$  – постоянные, дифференцируют как функцию переменной  $y$ ; при вычислении частной производной  $\frac{\partial u}{\partial z}$  считают, что  $z$  – переменная величина,  $x, y$  – постоянные, дифференцируют как функцию переменной  $z$ .

Если вектор  $\vec{l}$  имеет направляющие косинусы  $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ , то производную функции  $u = f(x, y, z)$  в точке  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  по направлению вектора  $\vec{l}$  находят по формуле

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} \cos\gamma.$$

Градиентом функции  $u = f(x, y, z)$  в точке  $M_0$  называется вектор

$$\overline{\text{grad } u} = \left( \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}, \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}, \frac{\partial u(M_0)}{\partial z} \right).$$

**Задача 11.** Частными производными второго порядка функции  $z = f(x, y)$  называются частные производные от ее частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right).$$

Аналогично определяются частные производные третьего, четвертого и высших порядков от функции трех и более переменных.

Смешанной частной производной называется частная производная второго порядка и выше, взятая по различным переменным.

Если частные производные высшего порядка непрерывны, то смешанные производные одного порядка не зависят от порядка дифференцирования.

**Задача 12.** Правила интегрирования.

$$\int c f(x) dx = c \int f(x) dx, \quad c = \text{const};$$

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx;$$

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Таблица интегралов.

$\int 0 dx = C;$
------------------

$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1);$	$\int \frac{dx}{x} = \ln x  + C;$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a = \text{const}, a > 0),$ в частности, $\int e^x dx = e^x + C;$	
$\int \sin x dx = -\cos x + C;$	$\int \cos x dx = \sin x + C;$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg } x + C;$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{ctg } x + C;$
$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin \frac{x}{ a } + C, \\ -\arccos \frac{x}{ a } + C; \end{cases}$	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \text{arctg } \frac{x}{a} + C, \\ -\frac{1}{a} \text{arcctg } \frac{x}{a} + C; \end{cases}$
$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{x-a}{x+a} \right  + C;$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left  x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right  + C.$

*Метод непосредственного интегрирования* основан на использовании только основных свойств неопределенного интеграла и таблицы интегралов.

*Метод замены переменной* (или *метод подстановки*) используют в двух случаях:

$$\text{а) } \int f(u(x))u'(x)dx = \left. \begin{matrix} u(x)=t, \\ u'(x)dx=dt \end{matrix} \right| = \int f(t)dt = F(t) + C = F(u(x)) + C,$$

где  $F(t)$  – первообразная для  $f(t)$ ;

$$\begin{aligned} \text{б) } \int f(x)dx &= \left. \begin{matrix} x=u(t), \\ dx=u'(t)dt \end{matrix} \right| = \int f(u(t))u'(t)dt = \\ &= \int g(t)dt = G(t) + C = G(u^{-1}(x)) + C, \end{aligned}$$

где  $G(t)$  – первообразная для  $f(u(t))u'(t)$ .

При использовании *метода поднесения под знак дифференциала* замену переменной не применяют. Интеграл вычисляют по формуле

$$\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u(x))d(u(x)) = F(u(x)) + C,$$

где  $F(u(x))$  – первообразная для  $f(u(x))$ .

*Интегрированием по частям* называется вычисление интеграла по формуле

$$\int udv = uv - \int vdu,$$

где  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$  – дифференцируемые функции.

Для нахождения интегралов

$$\int P(x)e^{\alpha x} dx, \quad \int P(x)\sin ax dx, \quad \int P(x)\cos ax dx,$$

где  $P(x)$  – многочлен,

за  $u$  принимают многочлен  $P(x)$ , а за  $dv$  – выражения соответственно  $e^{\alpha x} dx$ ,  $\sin ax dx$ ,  $\cos ax dx$ .