Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»
Институт информационных технологий

Кафедра физико-математических дисциплин

МАТЕМАТИКА

Методические указания
к выполнению индивидуальных заданий к
контрольным работам
для студентов всех специальностей ИИТ БГУИР
заочной формы получения высшего образования

Минск БГУИР 2015

Контрольные работы по дисциплине Математика

I семестр 2015-2016 учебного года.

Уважаемые студенты!

Необходимо решить контрольные работы №1 и №2: вариант 1 решают те студенты, у которых последняя цифра номера зачетки нечетная; вариант 2 – у которых 0 или четная.

Решенные и оформленые контрольные работы представляются преподавателюна первом практическом занятии зимней сессии.
На практическом занятии(в аудитории) необходимо будет решить аналогичные контрольные работы для допуска к экзамену. Возможно досрочное написание контрольных работ в дни консультаций заочников.

Консультации проводятся в 1-ю и 3-ю календарные субботы (День заочника)по расписанию (см. сайт ИИТ БГУИР)

Контрольная работа №1

Комплексные числа

Задача 1. Даны три комплексных числа z_1, z_2 и z_3:

1) выполните действия над ними в алгебраической, тригонометрической и показательной формах;

2) найдите расстояние между точками z_1 и z_3 на комплексной плоскости.

Вар-1. $z_1 = 2\sqrt{3} + 2i,\quad z_2 = -1 - \sqrt{3}i,\quad z_3 = 2 - 2i,\quad \dfrac{z_1 z_3^2}{z_2^4}.$

Вар-2. $z_1 = \sqrt{3} - i,\quad z_2 = 2 - 2\sqrt{3}i,\quad z_3 = -1 + i,\quad \dfrac{z_1^4}{z_2 z_3^2}.$

Задача 2. Решите уравнение на множестве комплексных чисел.

Вар-1. $z^2 - 4z + 5 = 0.$ Вар-2. $z^2 + 2z + 2 = 0.$

Элементы линейной алгебры

Задача 3. Решите систему уравнений:

1) методом Крамера;

2) методом Гаусса.

Вар-1. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = -6, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 6, \\ x_1 - x_2 + x_3 = -4. \end{cases}$ Вар-2. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = -8, \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

Элементы векторной алгебры

Задача 4. Даны три вектора $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ и $\bar{a}_3$. Докажите, что векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ образуют базис, и определите, какая это тройка векторов: правая или левая.

Вар-1. $\bar{a}_1 = (1; -3; 2)$, $\bar{a}_2 = (3; -2; 1)$, $\bar{a}_3 = (4; 1; -4)$.

Вар-2. $\bar{a}_1 = (1; -1; -2)$, $\bar{a}_2 = (2; 1; -1)$, $\bar{a}_3 = (3; -4; 1)$.

Элементы аналитической геометрии

Задача 5. Даны координаты вершин треугольной пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Найдите:

1) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;

2) площадь грани $A_1A_2A_3$;

3) длину высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$;

4) уравнение прямой, проходящей через ребро A_1A_2;

5) уравнение плоскости, которой принадлежит грань $A_1A_2A_3$.

6) массу материальной треугольной пирамиды $A_1A_2A_3A_4$, изготовленной из меди плотностью $\mu = 8{,}9\ \text{г}/\text{см}^3$ (считая, что 1 масштабная единица в системе координат равна 1 см).

Вар-1. $A_1(2; 1; -3)$, $A_2(1; 3; -2)$, $A_3(3; -2; -1)$, $A_4(1; -1; 3)$.

Вар-2. $A_1(3; 1; -3)$, $A_2(2; 3; 1)$, $A_3(1; 2; 3)$, $A_4(2; -2; 1)$.

Задача 6. Изобразите геометрическое место точек, заданных уравнением:
1) на плоскости;
2) в пространстве.

Вар-1. $9x^2-16y^2-36x-32y-124=0.$

Вар-2. $2x^2-12x+y+20=0.$

Контрольная работа №2

Элементы математического анализа

Задача 1. Найдите пределы последовательностей.

Вар-1. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)(n+2)^2-n(n+1)^2}{3n^2+1}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n^2-n+4}{5n^2-2n+3}\right)^{5n+1}$.

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n!-3(n-1)!}{3n\cdot n!+(n-1)!}$;

Вар-2. а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(2n^2-1)}{n(n+2)^3-(n-1)(n+1)^3}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n^2+n+3}{4n^2-3n+2}\right)^{2n-1}$.

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2(n+1)!-3n!}{2(n+3)!-n!}$;

Задача 2. Найдите производную $y'(x)$ заданных функций.

Вар-1. а) $y=\sin\left(\operatorname{arctg}^4(4x^3)\right)$; в) $y=\ln\dfrac{(x+3)^2}{\sqrt[3]{x+2}\,\sqrt[4]{(x-1)^5}}$.

б) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-7x+10}}{e^{2x}}$;

Вар-2. а) $y=\operatorname{tg}\left(\arccos^3(3x^2)\right)$; в) $y=\ln\dfrac{\sqrt{(x-2)^3}\,(x-1)^5}{\sqrt[3]{(x+5)^4}}$.

б) $y=\dfrac{e^{4x}}{\sqrt{x^2-9x+8}}$;

Задача 3. Найдите предел функции:

Вар-1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin \pi x}{\sqrt{2-x}-1}$. Вар-2. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg} x}$.

Задача 4. Дана функция $u=u(x,y,z)$:

1) вычислите все частные производные первого порядка;
2) найдите производную в точке M_0 по направлению вектора $\bar{a}$;
3) найдите $\overline{\operatorname{grad}}\, u(M_0)$.

Вар-1. $u=\dfrac{xz}{x-y}$, $M_0(3;1;1)$, $\bar{a}=\bar{i}+2\bar{j}+2\bar{k}$.

Вар-2. $u=ze^{-xy}$, $M_0(0;1;2)$, $\bar{a}=2\bar{i}+\bar{j}+2\bar{k}$.

Задача 5. Дана функция $u=u(x,y,z)$. Вычислите значение ее частной производной четвертого порядка в точке $M_0(1;1;1)$.

Вар-1. $u=\arcsin(1-3z)+x^2y^3z^3+\ln(2-xy)$, $\dfrac{\partial^4 u(M_0)}{\partial z\partial x^2\partial y}$.

Вар-2. $u=\operatorname{ctg}(1+2x)-x^3yz^4+e^{y+z^2}$, $\dfrac{\partial^4 u(M_0)}{\partial x\partial z^2\partial y}$.

Задача 6. Найдите неопределенные интегралы.

Вар-1. а) $\displaystyle\int\frac{\sqrt[5]{x}(x+1)}{x^2}dx$; в) $\displaystyle\int x(x-3)\cos 2x dx$;

б) $\displaystyle\int\frac{\sqrt[5]{\operatorname{ctg}^3 3x}}{\sin^2 3x}dx$; г) $\displaystyle\int\frac{3^x dx}{3^x-3^{-x}}$.

Вар-2. а) $\displaystyle\int\frac{5^x}{2^{2x}}dx$; в) $\displaystyle\int x(3x-2)e^{\frac{x}{2}}dx$;

б) $\displaystyle\int\frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{\cos 2x}}dx$; г) $\displaystyle\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2}}$.

Учебная программа дисциплины «Математика»

Раздел 1. Комплексные числа

Алгебраическая форма комплексного числа. Мнимая единица. Действия над комплексными числами в алгебраической форме. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа. Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах. Формула Муавра.

Решение квадратных уравнений на множестве комплексных чисел.

Раздел 2. Линейная алгебра

Тема 2.1. Матрицы. Матрицы. Виды матриц. Транспонирование. Сложение матриц и умножение матрицы на число, свойства этих операций. Умножение матриц, свойства умножения. Степень матрицы с натуральным показателем. Элементарные преобразования матрицы. Эквивалентные матрицы. Приведение матрицы к треугольному виду. Обратная матрица, ее существование и вычисление.

Тема 2.2. Определители. Определители 2-го и 3-го порядков, их свойства. Определители n-го порядка. Миноры и алгебраические дополнения. Различные способы вычисления определителей.

Тема 2.3. Системы линейных алгебраических уравнений. Системы линейных алгебраических уравнений. Формулы Крамера. Решение систем линейных уравнений с помощью обратной матрицы. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.

Раздел 3. Векторная алгебра

Тема 3.1. Векторы на плоскости и в пространстве. Понятие вектора. Координаты вектора. Длина вектора. Линейные операции над векторами в векторной форме. Линейно-зависимые и линейно-независимые системы векторов. Базис. Разложение вектора по базису. Координаты вектора в базисе.

Тема 3.2. Системы координат. Прямоугольная декартова система координат на плоскости и в пространстве. Координаты вектора в прямоугольной декартовой системе координат. Линейные операции над векторами в координатной форме. Длина вектора в координатах. Полярная система координат. Цилиндрическая и сферическая системы координат.

Тема 3.3. Скалярное, векторное, смешанное произведение векторов. Скалярное произведение векторов в геометрической и координатной форме, его свойства и физический смысл. Угол между двумя векторами и формула его косинуса. Условие ортогональности двух векторов. Векторное произведение векторов в геометрической и координатной формах. Свойства векторного произведения и его геометрический смысл. Смешанное произведение векторов в векторной и координатной формах, его свойства и геометрический смысл. Правая и левая тройки векторов. Критерий компланарности трех векторов.

Раздел 4. Аналитическая геометрия

Тема 4.1. Прямая и плоскость. Прямая на плоскости: различные виды уравнений. Плоскость в пространстве: различные виды уравнений. Прямая в пространстве: различные виды уравнений. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве.

Тема 4.2. Кривые 2-го порядка. Эллипс: каноническое уравнение, характеристики, изображение. Гипербола: каноническое уравнение, характеристики, изображение. Парабола: каноническое уравнение, характеристики, изображение.

Тема 4.3. Поверхности 2-го порядка. Эллипсоид, гиперболоиды, конус, параболоиды, цилиндры: канонический вид уравнений поверхностей и их изображение.

Раздел 5. Предел и непрерывность

Тема 5.1. Последовательность и ее предел. Понятие числовой последовательности. Способы задания числовой последовательности. Ограниченная и монотонная последовательности. Предел последовательности. Свойства сходящихся последовательностей. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности. Монотонные последовательности. Сходимость монотонной последовательности. Число «*e*».

Тема 5.2. Предел функции. Понятие предела функции в точке. Предел функции на бесконечности. Свойства функций, имеющих предел. Виды неопределенностей. Раскрытие неопределенностей. Первый и второй замечательные пределы. Эквивалентные функции. Таблица эквивалентности бесконечно малых. Односторонние пределы.

Тема 5.3. Непрерывность функции. Непрерывность функции в точке. Свойства функций, непрерывных на отрезке. Односторонняя непрерывность. Классификация точек разрыва функции. Непрерывность функции на промежутке. Свойства функций, непрерывных на отрезке. Асимптоты графика функции.

Раздел 6. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Тема 6.1. Производная и дифференциал 1-го порядка. Производная функции, ее геометрический и физический смысл. Основные правила дифференцирования. Таблица производных. Дифференцирование сложной функции. Логарифмическая производная. Дифференцирование функций, заданных параметрически и неявно. Дифференциал функции, использование в приближенных вычислениях. Правило Лопиталя.

Тема 6.2. Производные и дифференциалы высших порядков. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора. Разложение основных элементарных функций по формуле Маклорена.

Тема 6.3. Исследование функций. Условие монотонности функции. Локальный экстремум функции: необходимое и достаточное условия. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке. Необходимые и достаточные условия выпуклости и перегиба графика функции. Исследование функции и построение ее графика.

Раздел 7. Функции многих переменных

Тема 7.1. Функции многих переменных, дифференцируемость. Понятие функции многих переменных. Предел функции в точке, непрерывность. Частные производные функций многих переменных. Дифференцируемость функции многих переменных и ее дифференциал. Производная по направлению. Градиент. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Тема 7.2. Частные производные высших порядков. Частные производные высших порядков. Теорема о равенстве смешанных производных. Понятие неявной функции, определяемой одним уравнением, и ее дифференцируемость. Необходимые и достаточные условия экстремума функций многих переменных.

Раздел 8. Неопределенный интеграл

Тема 8.1. Правила и методы интегрирования. Первообразная и ее свойства. Таблица интегралов. Интегрирование методами замены переменной и поднесения под дифференциал. Интегрирование по частям.

Тема 8.2. Интегрирование основных классов функций. Интегрирование простейших рациональных дробей и рациональных функций. Интегрирование тригонометрических выражений. Интегрирование иррациональных функций. Интегрирование дифференциального бинома.

Рекомендации по выполнению задач по контрольной работе

3.1. Рекомендуемая литература для подготовки к контрольным работам

1. Гусак, А. А. Высшая математика : учеб. для вузов : в 2 т. / А. А. Гусак. – Минск : ТетраСистемс, 2009. – Т. 1. – 544 с. ; Т. 2. – 448 с.

2. Жевняк, Р. М. Высшая математика : в 5 ч. / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1984–1988. – Ч. 1. – 1984. – 223 с. ; Ч. 2. – 1985. – 221 с. ; Ч. 3. – 1985. – 208 с. ; Ч. 4. – 1987. – 240 с. ; Ч. 5. – 1988. – 256 с.

3. Жевняк, Р. М. Высшая математика. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Дифференциальное исчисление / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1992. – 384 с.

4. Жевняк, Р. М. Высшая математика. Функции многих переменных. Интегральное исчисление / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1993. – 412 с.

5. Жевняк, Р. М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Ряды. Уравнения математической физики. Теория функций комплексной переменной / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : ИРФ «Обозрение», 1997. – 570 с.

6. Жевняк, Р. М. Высшая математика. Операционное исчисление. Теория вероятностей. Математическая статистика / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : ИРФ «Обозрение», 1997. – 572 с.

7. Майсеня, Л. И. Справочник по высшей математике / Л. И. Майсеня, В. Э. Жавнерчик. – Минск : ТетраСистемс, 2010. – 272 с.

8. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис-пресс, 2009. – 608 с.

9. Руководство к решению задач по высшей математике : в 2 ч. / Е. И. Гурский [и др.] ; под общ. ред. Е. И. Гурского. – Минск : Выш. шк., 1989–1990. – Ч. 1. – 1989. – 349 с. ; Ч. 2. – 1990. – 400 с.

10. Сухая, Т. А. Задачи по высшей математике : в 2 ч. / Т. А. Сухая, В. Ф. Бубнов. – Минск : Выш. шк., 1993. – Ч. 1. – 446 с. ; Ч. 2. – 301 с.

3.2. Краткие теоретические сведения к выполнению контрольной работы

Задача1. *Алгебраическая форма комплексного числа*:

$$z = a + bi,$$

где $a, b \in \mathbf{R}$; $i = \sqrt{-1}$.

Если $z_1 = a_1 + b_1 i,\ z_2 = a_2 + b_2 i,$ то:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i;$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i;$$

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i, \qquad z_2 \neq 0.$$

Числу $z = a + bi$ на координатной плоскости соответствует точка $(a; b)$.

Расстояние d между точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ в прямоугольной декартовой системе координат:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Всякое комплексное число $z = a + bi$ $(z \neq 0)$ можно представить в *тригонометрической форме*

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

или в *показательной форме*

$$z = re^{i\varphi},$$

где $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ – *модуль числа* z;

$\varphi = \arg z$ $(0 \le \varphi < 2\pi$ либо $-\pi < \varphi \le \pi)$ – *аргумент числа* z:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{cases}$$

Если $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),\ z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$ причем $z_1, z_2, z \neq 0,$ то:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2));$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2));$$

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Если $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1},\ z_2 = r_2 e^{i\varphi_2},\ z = re^{i\varphi},$ причем $z_1, z_2, z \neq 0,$ то:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)};$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)};$$

$$z^n = r^n e^{in\varphi}, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Задача 2. Если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $z \neq 0$, $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$, то

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \qquad k = \overline{0, n-1}.$$

Корень n-й степени из комплексного числа z имеет n различных значений.

Задача 3. *Система трех линейных алгебраических уравнений с тремя неизвестными* x_1, x_2, x_3 имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

где a_{ij} – коэффициенты системы; b_i – свободные члены.

Матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

называется *матрицей системы*.

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ – матрица-столбец неизвестных; $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ – матрица-столбец свободных членов.

Определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

называется *определителем системы*.

Матрица

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right]$$

называется *расширенной матрицей* системы.

Элементарными преобразованиями строк матрицы называются:

1) перестановка строк;

2) умножение строки на одно и то же число λ $(\lambda \neq 0)$;

) прибавление к строке матрицы другой ее строки, умноженной на некоторое число.

Если определитель системы $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение.

М е т о д   К р а м е р а. Необходимо:

1) вычислить определитель Δ;

2) в определителе Δ заменить поочередно i-й столбец столбцом свободных членов и вычислить соответствующие определители Δ_i $(i = 1, 2, 3)$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix};$$

3) вычислить значения x_1, x_2, x_3 по *формулам Крамера*:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta};$$

4) записать решение $(x_1; x_2; x_3)$.

М е т о д   о б р а т н о й   м а т р и ц ы. Необходимо:

1) записать систему в матричном виде:

$$AX = B,$$

где A – матрица системы;

X – матрица-столбец неизвестных;

B – матрица-столбец свободных членов;

2) решить матричное уравнение

$$X = A^{-1}B,$$

где A^{-1} – обратная матрица;

3) записать решение $(x_1; x_2; x_3)$.

М е т о д   Г а у с с а. Необходимо:

1) записать расширенную матрицу системы;

2) с помощью элементарных преобразований строк расширенной матрицы свести матрицу системы к треугольной или трапециевидной (с нулевыми элементами под главной диагональю);

3) для преобразованной таким образом расширенной матрицы записать соответствующую систему уравнений;

4) решить полученную систему, начиная с последнего уравнения;

5) записать решение $(x_1; x_2; x_3)$.

Задача 4. *Базисом в пространстве* называются три упорядоченных некомпланарных вектора.

Векторы называются *компланарными*, если они параллельны одной и той же плоскости. Для компланарности ненулевых векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение было равно нулю, т. е. $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = 0$.

Если $\bar{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\bar{b} = (x_2; y_2; z_2)$, $\bar{c} = (x_3; y_3; z_3)$, то смешанное произведение в координатной форме:

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ с общим началом называется *правой*, если кратчайший поворот от вектора $\bar{a}$ к вектору $\bar{b}$ наблюдается из конца вектора $\bar{c}$ и происходит против хода часовой стрелки. В противном случае тройка векторов называется *левой*.

Тройка векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ является правой тогда и только тогда, когда $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) > 0$, и левой, когда $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) < 0$.

Задача 5. Пусть $\bar{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\bar{b} = (x_2; y_2; z_2)$, $\bar{c} = (x_3; y_3; z_3)$. Тогда

$$\cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}|\,|\bar{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Площадь S треугольника, построенного на векторах $\bar{a}, \bar{b}$:

$$S = \frac{1}{2}\left|[\bar{a}, \bar{b}]\right|,$$

где $\left|[\bar{a}, \bar{b}]\right|$ – длина вектора и

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Объем V пирамиды, построенной на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$:

$$V = \frac{1}{6}\left|(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})\right|,$$

где $\left|(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})\right|$ – модуль числа и

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и $M_3(x_3; y_3; z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Задача 6. На плоскости уравнение

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

задает эллипс с полуосями a, b и центром в точке $C(x_0; y_0)$; в пространстве – эллиптический цилиндр.

На плоскости уравнение

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

задает гиперболу с полуосями a, b и центром в точке $C(x_0; y_0)$; в пространстве – гиперболический цилиндр.

На плоскости уравнения

$$(y-y_0)^2=\pm 2p(x-x_0) \quad \text{или} \quad (x-x_0)^2=\pm 2p(y-y_0)$$

задают параболы с осью симметрии, параллельной одной из координатных осей, и вершиной в точке $C(x_0; y_0)$; в пространстве – параболические цилиндры.

Задача 7. Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, в противном случае – *расходящейся*.

Если последовательности (x_n) и (y_n) сходятся, то:

$$\lim_{n\to\infty} cx_n = c\lim_{n\to\infty} x_n, \qquad c=\text{const};$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n)=\lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n;$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n \neq 0.$$

Выражения вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0 называются *неопределенностями*.

При раскрытии неопределенности вида 1^∞ используют формулу

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e,$$

где $e=2,71828...$ – иррациональное число.

Задача 8. Правила дифференцирования. Если $u=u(x)$, $v=v(x)$ – дифференцируемые функции, то:

$$(cu)'=cu', \qquad c=\text{const};$$

$$(u\pm v)'=u'\pm v;$$

$$(uv)'=u'v+uv';$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}, \qquad v\neq 0.$$

Если $y=f\big(g(x)\big)$ – сложная функция, где $y=f(u)$, $u=g(x)$ – дифференцируемые функции, то

$$\frac{dy}{dx}=\frac{df}{du}\cdot\frac{dg}{dx}.$$

Таблица производных.

$(c)'=0, \qquad c=\text{const};$	
$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha=\text{const}),$ в частности, $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}},$	 $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2};$
$(a^x)'=a^x\ln a \quad (a=\text{const},\ a>0),$ в частности, $(e^x)'=e^x;$	
$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a} \quad (a=\text{const},\ a>0,\ a\neq 1),$ в частности, $(\ln x)'=\dfrac{1}{x};$	
$(\sin x)'=\cos x;$	$(\cos x)'=-\sin x;$
$(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x};$	$(\operatorname{ctg} x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x};$
$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$	$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
$(\operatorname{arctg} x)'=\dfrac{1}{1+x^2};$	$(\operatorname{arcctg} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2},$

Задача 9. Если существуют $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, то:

$$\lim_{x\to x_0} cf(x)=c\lim_{x\to x_0} f(x), \qquad c=\text{const};$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm\lim_{x\to x_0} g(x);$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x);$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}, \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0.$$

При раскрытии неопределенности вида $\frac{0}{0}$ часто используют формулы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \quad (\textit{первый замечательный предел});$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x} = \alpha, \qquad \alpha \neq 0.$$

Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой при* $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0.$

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1,$ где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые при $x \to x_0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными*; пишут: $\alpha(x) \sim \beta(x),\ x \to x_0.$

Если отношение двух бесконечно малых имеет предел, то он не изменится при замене каждой из бесконечно малых эквивалентной ей бесконечно малой.

Если $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$, то верны следующие эквивалентности:

$$\sin\alpha(x) \sim \alpha(x); \qquad \operatorname{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x);$$

$$\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x); \qquad \operatorname{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x);$$

$$\ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x); \qquad e^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x).$$

Правило Лопиталя. Если $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывные функции, имеющие производные в проколотой окрестности точки x_0, причем $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ в указанной окрестности, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ (или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$) и существует $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Задача 10. При вычислении частной производной $\frac{\partial u}{\partial x}$ функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ считают y, z постоянными и пользуются правилами дифференцирования и таблицей производных для функции одной переменной x.

При вычислении частной производной $\frac{\partial u}{\partial y}$ считают, что y – переменная величина, x, z – постоянные, дифференцируют как функцию переменной y; при вычислении частной производной $\frac{\partial u}{\partial z}$ считают, что z – переменная величина, x, y – постоянные, дифференцируют как функцию переменной z.

Если вектор $\bar{l}$ имеет направляющие косинусы $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, то производную функции $u = f(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ по направлению вектора $\bar{l}$ находят по формуле

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial u(M_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u(M_0)}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\cos\gamma.$$

Градиентом функции $u = f(x, y, z)$ в точке M_0 называется вектор

$$\overline{\text{grad}\, u} = \left(\frac{\partial u(M_0)}{\partial x},\ \ \frac{\partial u(M_0)}{\partial y},\ \ \frac{\partial u(M_0)}{\partial z}\right).$$

Задача 11. *Частными производными второго порядка* функции $z = f(x, y)$ называются частные производные от ее частных производных первого порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Аналогично определяются частные производные третьего, четвертого и высших порядков от функции трех и более переменных.

Смешанной частной производной называется частная производная второго порядка и выше, взятая по различным переменным.

Если частные производные высшего порядка непрерывны, то смешанные производные одного порядка не зависят от порядка дифференцирования.

Задача 12. Правила интегрирования.

$$\int c\, f(x)dx = c\int f(x)dx, \qquad c = \text{const};$$

$$\int \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx;$$

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Таблица интегралов.

$\int 0dx = C;$

$\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \quad (\alpha\neq-1);$	$\int\frac{dx}{x}=\ln\lvert x\rvert+C;$
$\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+C \quad (a=\text{const},\ a>0),$ в частности, $\int e^{x}dx=e^{x}+C;$	
$\int\sin x dx=-\cos x+C;$	$\int\cos x dx=\sin x+C;$
$\int\frac{dx}{\cos^{2}x}=\operatorname{tg}x+C;$	$\int\frac{dx}{\sin^{2}x}=-\operatorname{ctg}x+C;$
$\int\frac{dx}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}}=\left[\begin{array}{l}\arcsin\frac{x}{\lvert a\rvert}+C,\\ -\arccos\frac{x}{\lvert a\rvert}+C;\end{array}\right.$	$\int\frac{dx}{a^{2}+x^{2}}=\left[\begin{array}{l}\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C,\\ -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a}+C;\end{array}\right.$
$\int\frac{dx}{x^{2}-a^{2}}=\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert+C;$	$\int\frac{dx}{\sqrt{x^{2}\pm a^{2}}}=\ln\left\lvert x+\sqrt{x^{2}\pm a^{2}}\right\rvert+C.$

Метод непосредственного интегрирования основан на использовании только основных свойств неопределенного интеграла и таблицы интегралов.

Метод замены переменной (или *метод подстановки*) используют в двух случаях:

$$\text{а) } \int f\big(u(x)\big)u'(x)dx=\begin{vmatrix}u(x)=t,\\ u'(x)dx=dt\end{vmatrix}=\int f(t)dt=F(t)+C=F\big(u(x)\big)+C,$$

где $F(t)$ – первообразная для $f(t)$;

$$\text{б) } \int f(x)dx=\begin{vmatrix}x=u(t),\\ dx=u'(t)dt\end{vmatrix}=\int f\big(u(t)\big)u'(t)dt=$$

$$=\int g(t)dt=G(t)+C=G\big(u^{-1}(x)\big)+C,$$

где $G(t)$ – первообразная для $f\big(u(t)\big)u'(t)$.

При использовании *метода поднесения под знак дифференциала* замену переменной не применяют. Интеграл вычисляют по формуле

$$\int f\big(u(x)\big)u'(x)dx=\int f\big(u(x)\big)d\big(u(x)\big)=F\big(u(x)\big)+C,$$

где $F\big(u(x)\big)$ – первообразная для $f\big(u(x)\big)$.

Интегрированием по частям называется вычисление интеграла по формуле

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du,$$

где $u = u(x)$, $v = v(x)$ – дифференцируемые функции.

Для нахождения интегралов

$$\int P(x)e^{\alpha x}dx, \quad \int P(x)\sin axdx, \quad \int P(x)\cos axdx,$$

где $P(x)$ – многочлен,
за u принимают многочлен $P(x)$, а за dv – выражения соответственно $e^{\alpha x}dx$, $\sin axdx$, $\cos axdx$.