

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Задания для самостоятельной работы
студентов учебных групп 381071-381074 специальности ПОИТ
заочной формы получения высшего образования (осенний семестр 2014-15 уч. г.)

1. Даны множества $A = \{1, 2, 5, 8, 9\}$, $B = \{2, 7, 8\}$. Найдите их объединение, пересечение, разности и дополнения до множества $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.
2. Даны множества $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$. Запишите элементы прямого произведения $A \times B$ этих множеств. Определите мощности множеств и число их подмножеств.
3. Даны множества $U = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$, M_1 – множество всех чисел, кратных 3, M_2 – множество всех чисел, кратных 5. Найдите объединение, пересечение, разности и дополнения множеств M_1 и M_2 . Определите мощности множеств.
4. Запишите все перестановки из элементов множества $\{a, b, c\}$. Найдите к каждой из них обратную.
5. Решите следующие комбинаторные задачи.
 - 1) Метка состоит из буквы и цифры. Определите количество меток, составленных из 5 букв и 6 цифр.
 - 2) В лотерее выбирается шесть разных номеров из первых 45 натуральных чисел. Определите количество возможных вариантов выбора.
 - 3) Определите, сколькими способами в кондитерской можно выбрать 2 булочки из 5 видов, если:
 - нельзя выбирать булочки одного вида, и порядок выбора важен;
 - можно выбирать булочки одного вида, и порядок выбора важен;
 - нельзя выбирать булочки одного вида, но порядок выбора неважен;
 - можно выбирать булочки одного вида, но порядок выбора неважен.
 - 4) Из пункта A в пункт B проложено две дороги, из пункта B в пункт C – три, из пункта C в пункт D – четыре, из D в A – пять. Определите, сколько существует вариантов поездок из пункта A в пункт C .
 - 5) Для записи целого числа используется строка из 16 двоичных цифр. Определите, сколько различных целых чисел может быть использовано при таком способе записи, если первая цифра зарезервирована под знак.
 - 6) На полке в холодильнике лежат фрукты: 3 банана, 4 груши, 5 яблок. Определите

количество вариантов выбора двух фруктов разных видов.

7) Регистрационный знак легкового автомобиля представляет собой запись двух букв 12-буквенного алфавита и четырех арабских цифр. Определите, сколько различных номеров может быть выдано.

8) На каждой из игральные кости может выпасть от одного до шести очков. Определите количество вариантов выпадения очков при подбрасывании трех костей.

9) Из колоды в 36 карт произвольно вытягивается 3 карты. Определите количество комбинаций, содержащих ровно 1 туза (напомним, что в колоде 4 туза).

10) Для составления пароля, состоящего из трех различных символов, используется 10 цифр. Определите:

- сколько можно создать разных паролей;
- сколько можно создать разных паролей, в которые войдут цифры 0 и 1;
- сколько можно создать паролей, в которых не будет ни цифры 0, ни цифры 1;
- сколько можно создать паролей, в которых будет или цифра 0, или цифра 1 (но не обе).

11) Все буквы, составляющие слова «МАТЕМАТИКА», нарисованы на отдельных карточках, которые перевернуты изображением вниз и перемешаны. Определите, сколько существует вариантов собрать это слово «вслепую».

12) Определите, сколько различных «слов» можно составить из слова МАТЕМАТИКА».

6. Определите количество натуральных чисел, не превосходящих 100, которые не делятся ни на 3, ни на 5.

7. Составьте таблицы истинности функций трех переменных, заданных формулами:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2) \rightarrow (x_1 \mid (x_2 \oplus x_3)), \quad f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \downarrow x_2) \vee x_1 \overline{(x_2 \oplus x_3)}.$$

Запишите их канонические формы. Используя алгебраические преобразования, упростите полученные выражения.

Проведите минимизацию с помощью диаграммы Вейча (карты Карно).

Разложите заданные функции по двум первым переменным (теорема Шеннона) и упростите.

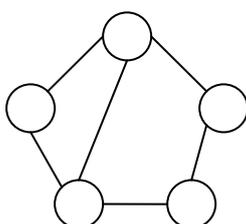
Сравните полученные результаты.

8. Постройте диаграмму Вейча для функции $x_1 x_2 x_3 \vee \overline{x_1 x_2 x_3} \vee \overline{x_1} x_2 x_4 \vee \overline{x_2} x_4 x_5$ и запишите минимальное выражение в ДНФ.

9. Постройте систему функций, преобразующий двоичный код ($n = 3$) в код Грея.

10. Булева функция 10 переменных не определена для 30 значений. Сколько существует вариантов доопределения этой функции?

11. Постройте для неориентированного графа матрицы смежности и инцидентности, сопряженный (реберный) граф.



12. Изобразите неориентированный граф со множеством $V = \{a, b, c, d\}$ вершин и множеством $E = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, d)\}$ ребер. Составьте его матрицы смежности и инцидентности. Определите степени вершин. Выясните, является ли он планарным.

13. С помощью графа на множестве $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ задайте отношения:

1) $x + y \leq 5$;

2) $x - y < 0$.

14. Изобразите орграф со множеством $V = \{a, b, c, d\}$ вершин и множеством $E = \{(a, b), (b, c), (b, d), (c, d), (d, a), (d, b)\}$ дуг. Составьте его матрицы смежности и инцидентности. Определите полустепени входа и выхода его вершин.

15. В поселке 6 стационарных телефонов. Можно ли каждый из них соединить кабелем ровно с тремя другими? Изменится ли ответ, если добавить еще один телефон?

16. В понедельник проводится 6 лекций. Некоторые из них нельзя читать одновременно. Определить минимальное время, за которое могут быть прочитаны все лекции, если на каждую отводится 2 академических часа. В таблице 1 крестиком помечены лекции, которые не могут начинаться в одно и то же время.

Таблица 1

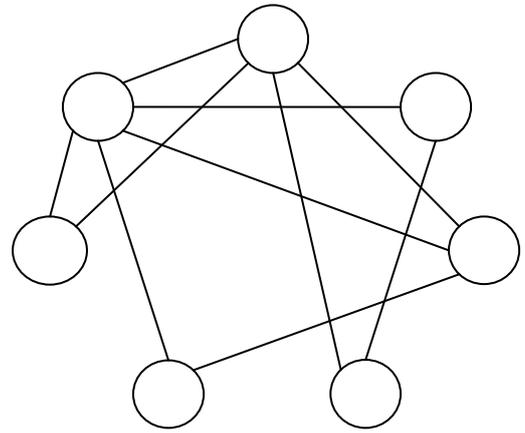
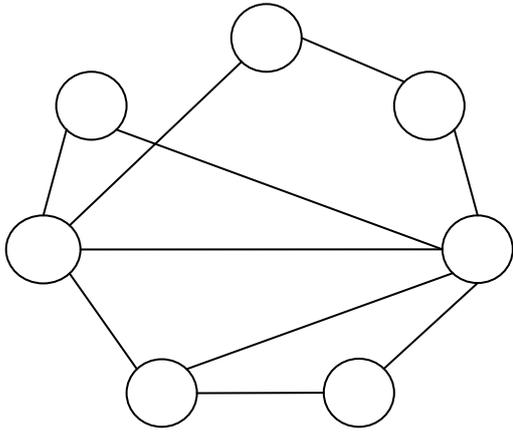
	Математика	Физика	Социология	Логика	Английский язык	Французский язык
Математика		x	x		x	
Физика	x		x		x	x
Социология	x	x			x	
Логика						x
Английский Язык	x	x	X			
Французский Язык		x		x		

17. В спортивных соревнованиях каждая команда сыграла с каждой другой. Сколько было проведено встреч в случае 10 участников? Можно ли эту задачу решить для произвольного числа команд?

18. Между городами A, B, C, D, E, F, G, H установлено автобусное сообщение по следующей схеме: $A-B, A-C, A-D, C-E, F-G, F-H, G-H$. Определить: 1) Можно ли доехать на рейсовом автобусе из города A в город E и G ? Если да, то определить маршрут с наименьшим числом пересадок. 2. Если каждый из городов соединен автобусным сообщением не менее, чем с четырьмя другими, то можно ли в этом случае добраться из каждого города в любой другой?

19. Постройте плоский граф, изоморфный полному, состоящему из четырех вершин.

20. Определите, изоморфны ли графы



21. Постройте граф, для которого задана матрица смежности

$$\begin{matrix}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
 \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
 \end{matrix}$$

22. Постройте орграф по его матрице смежности

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

23. Для шести белорусских городов и попарных расстояний между ними (табл. 2) построить минимальную сеть дорог (найти минимальное остовное дерево полного графа с 6-ю вершинами).

Таблица 2

	Гомель	Гродно	Минск	Могилев	Пинск
Барановичи	431	214	147	393	161
Гомель		596	300	175	365
Гродно			301	557	284
Минск				261	296
Могилев					541

24. Для семи деревень $A - G$ и попарных расстояний между ними (табл. 3) построить минимальную сеть дорог и найти ее суммарный вес.

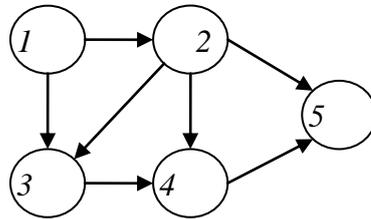
Таблица 3

	B	C	D	E	F	G
A	8	14	25	5	12	17
B		8	15	10	21	7
C			14	23	40	31
D				7	17	9
E					6	18

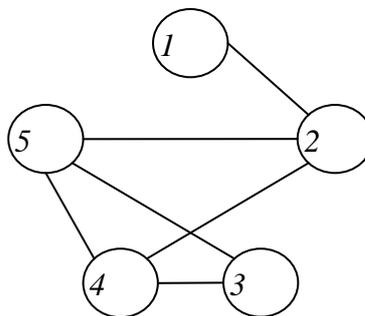
<i>F</i>						12
-----------------	--	--	--	--	--	----

Для графа, описывающего схему дорог, найти количество остовных деревьев.

25. Постройте матрицу достижимости орграфа, элементы a_{ij} которой равны длине минимального маршрута из вершины v_i в вершину v_j .



26. Составьте матрицу минимальных расстояний от вершины i к вершине j графа, изображенного на рисунке:



Рекомендуемая литература

1. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера. – М.: Энергия, 1980. – 342 с.
2. Липский В. Комбинаторика для программистов. – М.:Мир, 1988. – 213 с.
3. Ерусалимский Я.М. Дискретная математика. М.: Вузов. кн., 2005.
4. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. (2-е изд).М.-С.-Пб.:Питер.2005.
5. Андерсон, Дж. А. Дискретная математика и комбинаторика. - Пер. с англ. — М. : Издательский дом "Вильямс", 2004.
6. Хаггарт Р. Дискретная математика для программистов. – М.: Техносфера, 2005.
7. Плотников А.Д. Дискретная математика: учеб. пособие . — М.: Новое знание, 2005.